

# Etude cinématique des systèmes TD 1

## Exercice 1 : changement de repère et produit scalaire

Soit  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$  un repère de base  $B_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  orthonormée directe. On considère deux nouveaux repères :

- le repère  $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$  de base  $B_1$  est déduit de  $R_0$  par une rotation autour de  $(O, z_0)$  d'un angle  $\alpha$ ,
- le repère  $R_2(O, x_2, y_2, z_2)$  de base  $B_2$  est déduit de  $R_1$  par une rotation autour de  $(O, y_1)$  d'un angle  $\beta$ .

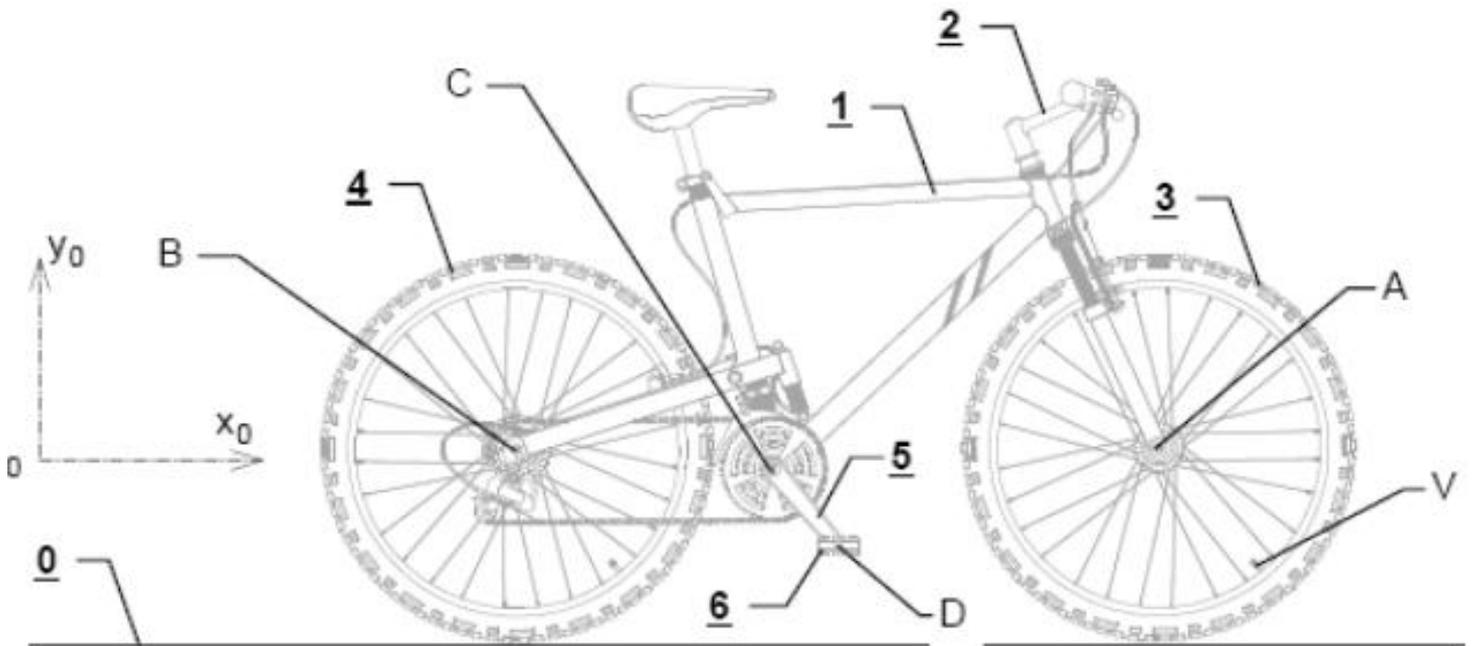
Soit les vecteurs  $\vec{U} = \vec{i}_0 + 3\vec{j}_0$  et  $\vec{V} = \vec{i}_2 + 2\vec{k}_1$

- 1 – Réaliser les figures précisant l'orientation du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$  et du repère  $R_2$  par rapport au repère  $R_1$ .
- 2 – Calculer la norme du vecteur  $\vec{U}$ .
- 3 – Exprimer le vecteur  $\vec{V}$  dans  $B_1$  puis dans  $B_0$ .
- 4 – Exprimer le vecteur  $\vec{U}$  dans  $B_1$  puis dans  $B_2$ .
- 5 – Calculer le produit scalaire  $\vec{U} \cdot \vec{V}$ .
- 6 – Calculer la norme du vecteur  $\vec{V}$ .

## Exercice 2 : trajectoires

Soit le système composé d'un VTT et de son vététiste (non représenté) en mouvement par rapport à un repère fixe  $R_0$  lié au chemin.

Le point A est situé sur l'axe de la roue avant, le point B sur l'axe de la roue arrière, le point C sur l'axe du pédalier et le point D sur l'axe de la pédale. Le point V est attaché à la valve de la roue avant. Les roues roulent sans glisser par rapport au chemin, le vététiste pédale et va tout droit. On fera l'hypothèse que la pédale reste parallèle au sol.



Associer un repère au cadre du vélo 1, à la roue avant 3, au pédalier 5 et à la pédale 6.

Préciser les différents mouvements suivants :

$M^{vt}$  de 1/0 ;  $M^{vt}$  de 3/1 ;  $M^{vt}$  de 5/1 ;  $M^{vt}$  de 6/5 ;  $M^{vt}$  de 6/1 ;  $M^{vt}$  de 6/0 .

Déterminer les trajectoires suivantes :

$T(A, 1/R_0)$  ;  $T(A, 3/R_1)$  ;  $T(D, 5/R_1)$  ;  $T(V, 3/R_1)$  ;  $T(V, 3/R_0)$  .

### Exercice 3 : Système bielle manivelle de moteur à explosion

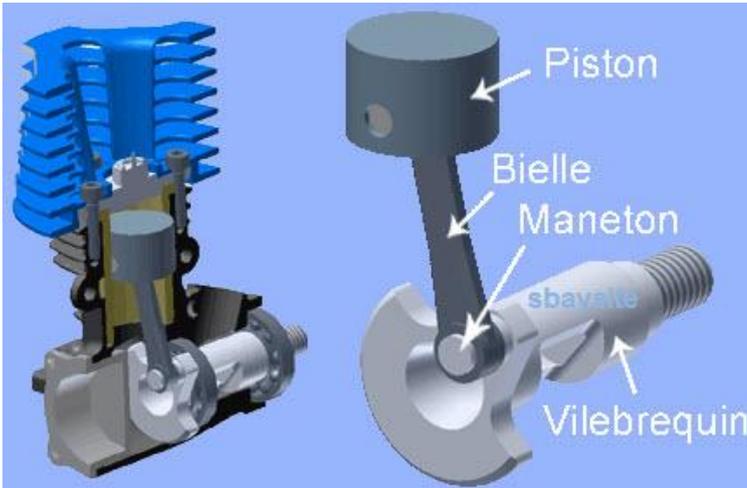


Figure 1

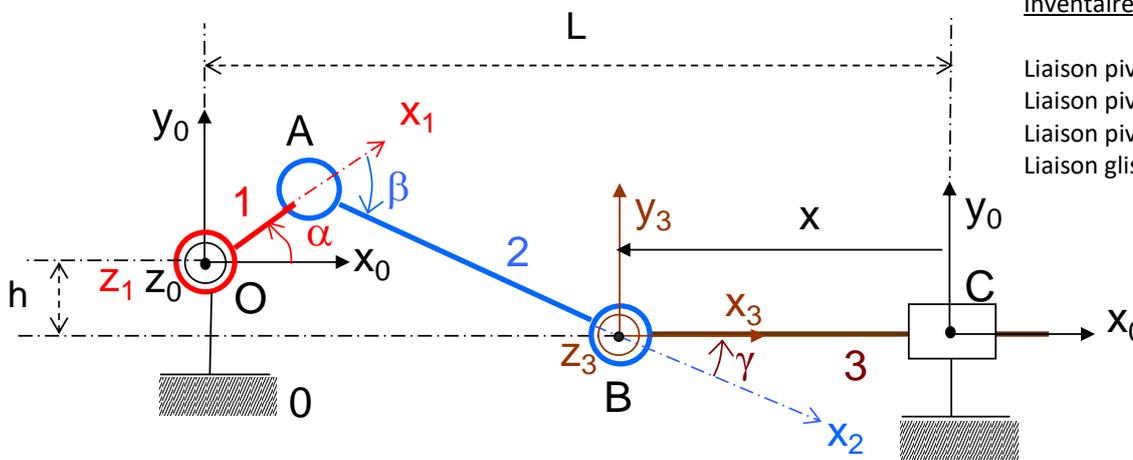
On considère un moteur à explosion de modèle réduit dont le schéma est donné figure 1.

L'explosion des gaz provoque le déplacement en translation du piston 3 suivant  $x_0$ . Cette translation est transformée en rotation du vilebrequin 1 (arbre moteur) par l'intermédiaire d'une bielle 2. Le diamètre du piston sur lequel agissent les gaz est de 30 mm.

Notations : (voir schéma cinématique)

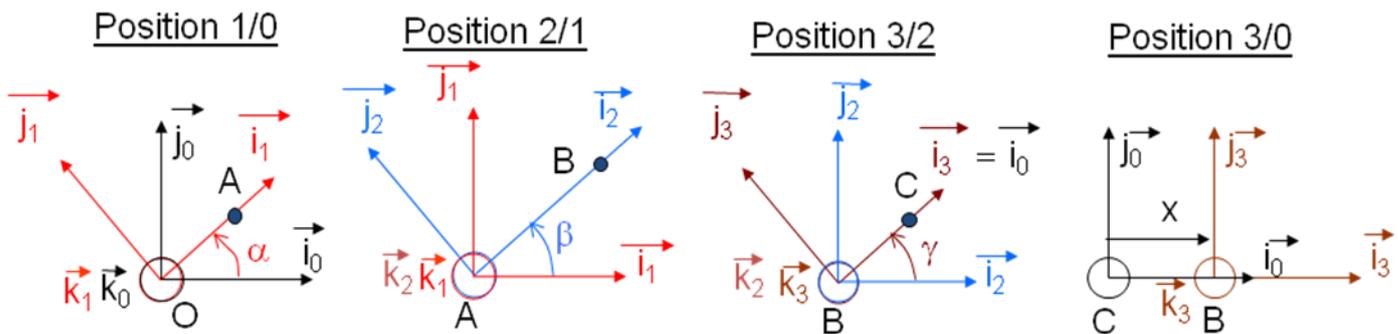
- OA = a = 30 mm (excentration vilebrequin)
- AB = b = 80 mm (longueur bielle)
- h = 40 mm (distance fixe sur bâti)
- L = 150 mm (distance fixe sur bâti)

Schéma cinématique :



Inventaire des liaisons :

- Liaison pivot de 1/0 d'axe  $(O, z_0)$
- Liaison pivot de 2/1 d'axe  $(A, z_0)$
- Liaison pivot de 3/2 d'axe  $(B, z_0)$
- Liaison glissière 3/0 de direction  $x_0$



Problématique :

On souhaite déterminer la cylindrée du moteur, c'est-à-dire le volume balayé par le piston pour un tour du moteur. De la cylindrée dépend, entre autre, la puissance du moteur.

Il nous faut donc déterminer les 2 positions extrêmes du piston. Pour cela, on va déterminer les relations liant les paramètres de position dans une position quelconque.

Questions :

1. Quels sont les paramètres d'entrée et de sortie du système ?
2. Effectuer le graphe de liaisons.
3. Exprimer la fermeture géométrique vectorielle.
4. Projeter dans  $B_0$ .
5. Déterminer littéralement la relation entre la position du piston et la position du vilebrequin à un instant donné (loi entrée-sortie). Tracer la courbe.
6. En déduire la course du piston, puis la cylindrée du moteur.

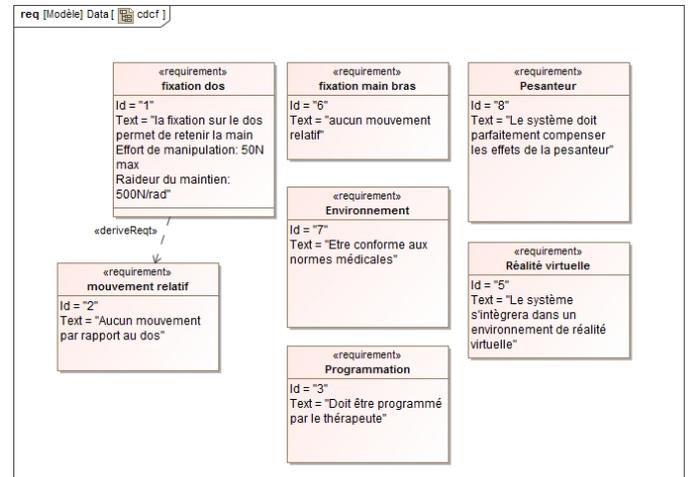


## Exercice 5 : La robotique au service du handicap, orthèse (extrait centrale 2010)

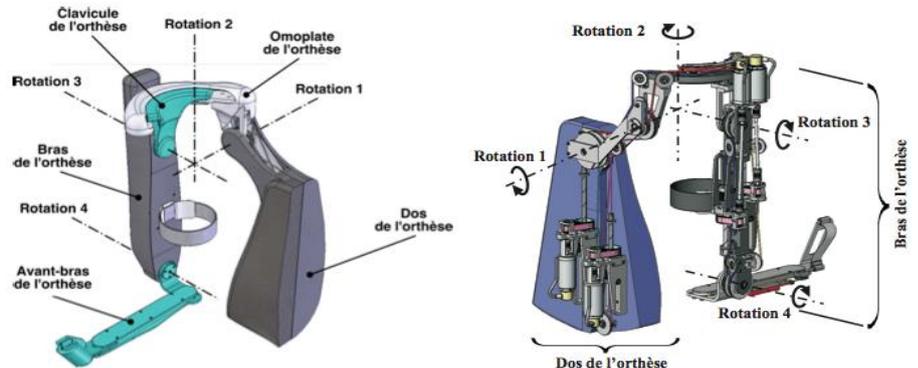
Les avancées technologiques récentes des actionneurs électriques ont permis le développement du champ d'application de la robotique dans le traitement du handicap et dans la rééducation de la motricité chez l'homme. Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue, entre autres applications, au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu, et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

Pendant une phase de rééducation de la motricité de l'épaule et du bras, l'environnement peut être partiellement modélisé par le diagramme des exigences ci-contre.

Le type d'orthèse retenu pour cette étude est un système poly articulé à quatre axes de rotation entraînés par des moteurs à courant continu, dont un modèle numérique est représenté ci-dessous. Dans toute la suite, les termes « bras » et « avant-bras » désigneront des parties de l'orthèse, sauf quand on mentionne explicitement le bras ou l'avant-bras du patient.



ORTHÈSE D'ÉPAULE

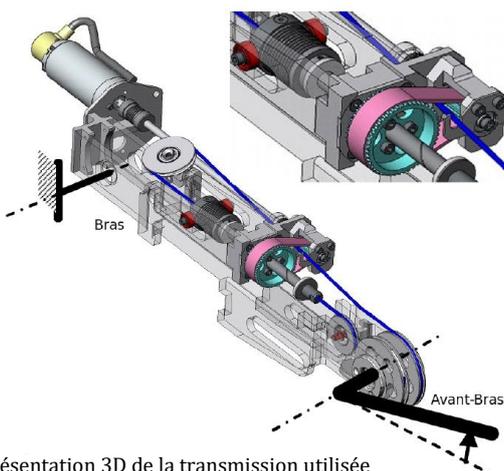


Représentation 3D de l'exosquelette

On remarquera en particulier que le cahier des charges impose que le patient ne doit pas ressentir les effets de la pesanteur associée aux différents éléments articulés de l'orthèse : ainsi, au repos, la chaîne de motorisation et de commande doit compenser les efforts de pesanteur sur le bras et l'avant-bras de l'orthèse (compensation statique).

### Etude du transmetteur

La définition et la conception de la loi de commande de l'actionneur nécessitent d'étudier précisément la dynamique de la transmission depuis le moteur jusqu'à l'axe de l'articulation mise en mouvement. On donne une représentation 3D de la transmission utilisée ainsi que le schéma de principe structurel. L'axe du moteur est relié par l'intermédiaire de deux joints déformables (dont le comportement peut-être assimilé à deux joints de Cardan) et d'une tige cylindrique intermédiaire I à l'axe 24 d'une petite roue dentée ;



Représentation 3D de la transmission utilisée

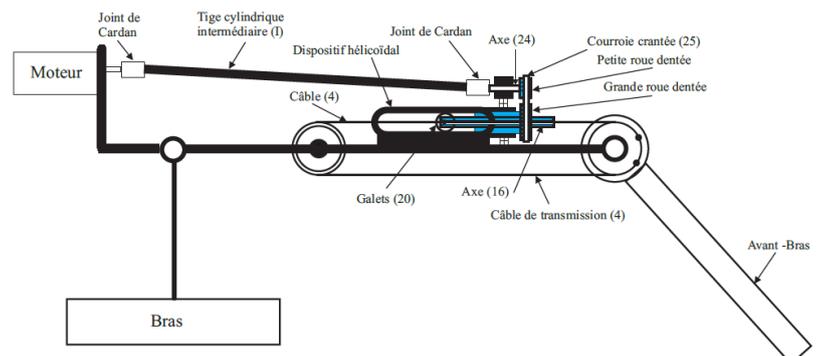


Figure 6 Schéma de principe de la transmission

On s'intéresse à la transmission du mouvement de rotation entre l'axe du moteur et l'axe 24 de la petite roue dentée par l'intermédiaire des deux joints de Cardan. Il est donc nécessaire de déterminer la relation cinématique d'entrée-sortie dans un seul joint de Cardan dont le schéma cinématique est donné sur la figure 7 avec le paramétrage suivant imposé :

- l'arbre d'entrée **E** est en liaison pivot d'axe  $(O_E, \vec{y}_E)$  avec le bâti fixe associé au repère  $(O_E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , avec  $\theta_E = (\vec{x}, \vec{x}_E) = (\vec{z}, \vec{z}_E)$  ;
- l'arbre de sortie **S** est en liaison pivot d'axe  $(O_S, \vec{y}_S)$  avec le bâti fixe associé au repère  $(O_S, \vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z})$ , avec  $\theta_S = (\vec{x}^*, \vec{x}_S) = (\vec{z}^*, \vec{z}_S)$  ;
- on note  $\varphi$  l'angle constant que forment les axes des deux arbres qui sont reliés par le joint de Cardan, avec  $\varphi = (\vec{x}, \vec{x}^*) = (\vec{y}, \vec{y}^*)$ .

Le joint de Cardan se compose :

- d'une fourchette **FE**, liée à l'arbre d'entrée **E** d'axe  $(O_E, \vec{y}_E)$ , disposant de deux alésages d'axe commun  $(I, \vec{z}_E)$  ;
- d'une fourchette **FS**, liée à l'arbre de sortie **S** d'axe  $(O_S, \vec{y}_S)$ , disposant de deux alésages d'axe commun  $(I, \vec{x}_S)$  ;
- d'un croisillon **C**, en liaisons pivots d'axes  $(I, \vec{z}_E)$  et  $(I, \vec{x}_S)$  respectivement avec les fourchettes **FE** et **FS**.

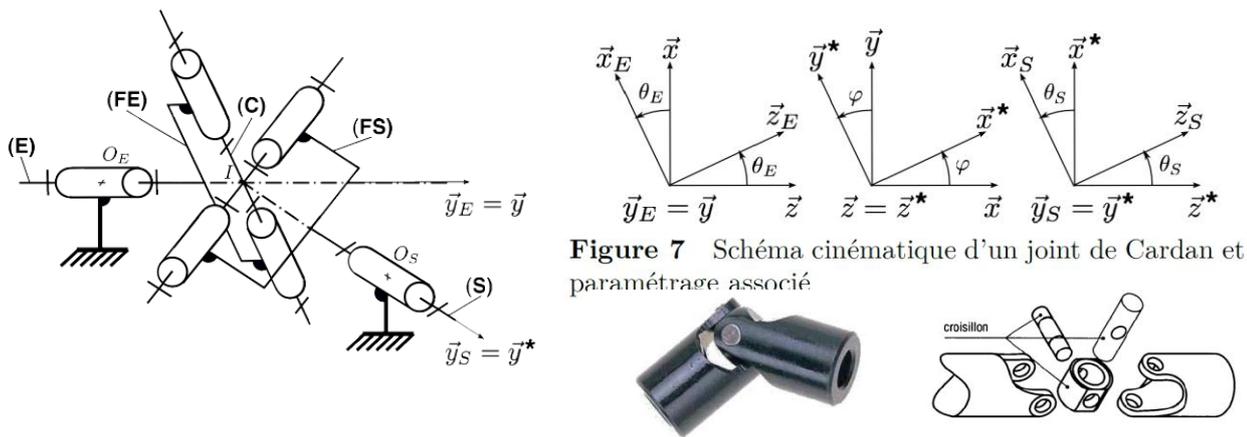
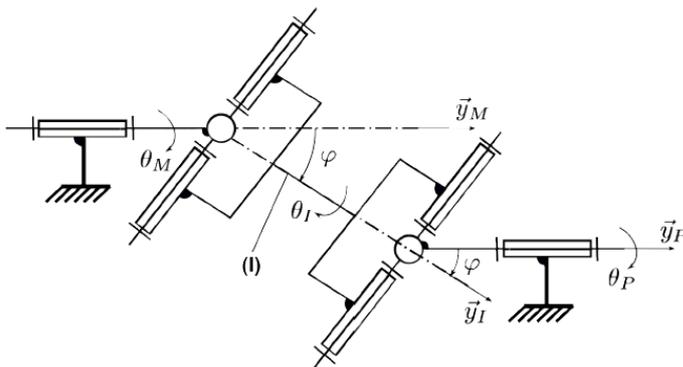


Figure 7 Schéma cinématique d'un joint de Cardan et paramétrage associé

1. Par construction, les deux axes du croisillon sont orthogonaux. Écrire, en utilisant cette propriété, une équation liant les deux paramètres angulaires  $\theta_E$ ,  $\theta_S$  et l'angle constant  $\varphi$ .
2. En déduire la relation exprimant la vitesse angulaire de sortie  $\omega_s = \dot{\theta}_s$  en fonction de la vitesse angulaire d'entrée  $\omega_E = \dot{\theta}_E$ , de l'angle  $\varphi$  et de la tangente de l'angle  $\theta_E$ .
3. Tracer l'allure de  $\omega_s$  en fonction du temps, dans le cas où  $\omega_E$  est constante ; on précisera les valeurs minimale et maximale de  $\omega_s$  au cours du temps en fonction de  $\varphi$  et  $\omega_E$ . Le joint est-il homocinétique ?



Disposition des deux joints de Cardan dans la transmission étudiée

Dans la transmission étudiée, les deux joints de Cardan sont reliés par une tige cylindrique intermédiaire I selon la géométrie de la figure ci-dessus. Les axes du moteur et de la petite roue dentée sont parallèles, de sorte que l'axe de la tige cylindrique I soit contenu dans le plan caractérisé par les deux axes précédents, et forme un angle  $\varphi$  avec chacun de ces axes.

4. Déterminer une relation entre  $\omega_M$  et  $\omega_P$ . Conclure sur l'intérêt d'employer deux joints de Cardan dans cette configuration spécifique plutôt qu'un seul, et caractériser par un mot la propriété ainsi réalisée par les deux joints de Cardan.