TD 4 : EXERCICES DE GAMME SUR LA TORSION DES POUTRES CYLINDRIQUES

1 - Comparaison entre un arbre plein et un arbre creux

Deux arbres en acier, l'un plein de diamètre d, l'autre creux de diamètres D et 0,8 D, ayant la même longueur doivent transmettre le même couple.

Calculer le rapport de leur masse dans les cas suivants :

Question 1: *La contrainte maximale est la même pour les deux arbres*
Question 2: *L'angle de torsion unitaire est le même pour les deux arbres.*

2 - Arbre creux cylindrique

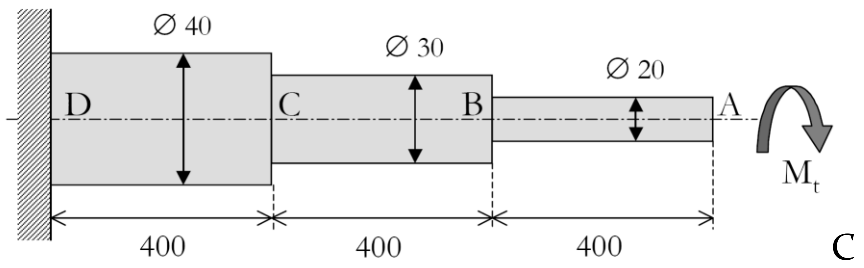
On transmet une puissance de 45 kW à 1000 tr/min avec un arbre qui est en fait un tube d'acier. Son diamètre extérieur est D = 36 mm et son diamètre intérieur est d = 28 mm.

Question 1: *Calculer la contrainte maximale.*
Question 2: *Calculer l'angle unitaire de torsion.*

3 - Torsion d'un arbre étagé

On considère un arbre en acier (*G = 80 000 N.mm⁻²*) de longueur *L = 1, 2 m* étagé en trois morceaux de diamètres respectifs 40, 30 et 20 mm. Cet arbre est sollicité en torsion pure par un couple *Mt*. On négligera ici les concentrations de contraintes relatives aux changements de diamètre. On prendra *Re=500Mpa*

Rappel Rg=0.7Re pour l'acier.



Question 1: *Donner l'expression du torseur de cohésion dans une section droite S de cet arbre.*
Question 2: *Quelle doit être l'intensité du couple de torsion Mt pour que les sections extrêmes S_A et S_D tournent de 1° l'une par rapport à l'autre ?*
Question 3: *Tracer le diagramme des angles de torsion unitaires le long de l'arbre.*
Question 4: *Calculer la contrainte maximale subie par l'arbre. Déterminer le coefficient de sécurité maxi.*

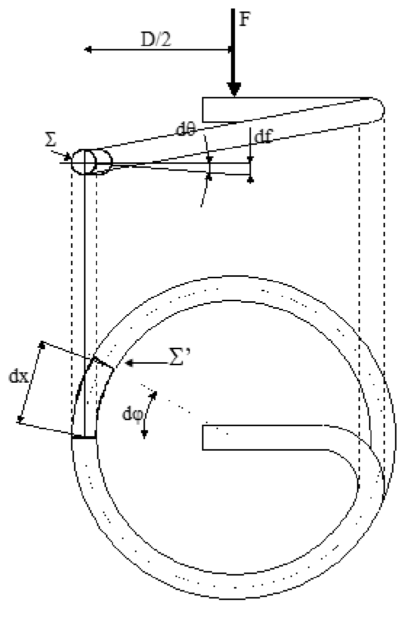
4 - Ressort de hélicoïdal

Le croquis ci-contre représente un ressort hélicoïdal. On a isolé un tronçon de spire d'angle dφ. On note :

D = diamètre de la spire
d = diamètre du fil

Lorsque l'on charge le ressort (F), la section Σ tourne d'un angle dθ. Ceci correspond à un écrasement df du ressort.

Question 1: *Calculer la flèche du ressort si celui-ci comporte n spires entières.*
Question 2: *Calculer la rigidité k du ressort.*
Question 3: *Calculer la contrainte maximale dans la section d'une spire.*



Eléments de correction :

Comparaison entre un arbre plein et un arbre creux

Q1

$\tau_{\max 1} = \dfrac{M_t}{I_{G1}} * \dfrac{d}{2}$ $I_{G1} = \pi \dfrac{d^4}{32}$ donc $\tau_{\max 1} = \dfrac{16M_t}{\pi d^3}$	$\tau_{\max 2} = \dfrac{M_t}{I_{G2}} * \dfrac{D}{2}$ $I_{G2} = \pi \dfrac{\left(D^4 - (0.8D)^4\right)}{32} = \pi \dfrac{0.59 * D^4}{32}$ donc $\tau_{\max 2} = \dfrac{16M_t}{\pi * 0.59 * D^3}$
$\tau_{\max 1} = \tau_{\max 2} \Leftrightarrow d^3 = 0.59D^3$ $\boxed{\Leftrightarrow d = 0.84D}$ $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\rho L \pi \dfrac{d^2}{4}}{\rho L \pi \dfrac{D^2 - (0.8D)^2}{4}} = \dfrac{0.84^2}{1-0.8^2} = 1.96}$	

Q2

$\theta_1 = \dfrac{M_t}{G.I_{G1}}$ $I_{G1} = \pi \dfrac{d^4}{32}$ donc $\theta_1 = \dfrac{32M_t}{\pi d^4 G}$	$\theta_2 = \dfrac{M_t}{G.I_{G2}}$ $I_{G2} = \pi \dfrac{\left(D^4 - (0.8D)^4\right)}{32} = \pi \dfrac{0.59 * D^4}{32}$ donc $\theta_2 = \dfrac{32M_t}{\pi * 0.59 * D^4 G}$
$\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow d^4 = 0.59D^4$ $\boxed{\Leftrightarrow d = 0.88D}$ $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\rho L \pi \dfrac{d^2}{4}}{\rho L \pi \dfrac{D^2 - (0.8D)^2}{4}} = \dfrac{0.88^2}{1-0.8^2} = 2.13}$	

Arbre creux cylindrique

Q1 $\tau = \dfrac{M_t.r}{I_0} = \dfrac{32.P.D/2}{\omega.\pi(D^4 - d^4)}$ Application numérique : $\tau = 74MPa$

Q2 $M_t = G.\theta.I_0$ donc $\theta = \dfrac{M_t}{G.I_0} = \dfrac{P}{\omega.G.I_0} = \dfrac{45000}{1000 * \dfrac{\pi}{30} * 80.10^9 * \dfrac{\pi(0,018^4 - 0,014^4)}{32}} = 0.05 rad.m^{-1} = 2,94°.m^{-1}$

Ressort hélicoïdal

Q1 $M_t = G\alpha I_G = F\dfrac{D}{2}$ donc l'angle de torsion unitaire α vaut : $\alpha = \dfrac{FD}{2GI_G} = \dfrac{16FD}{G\pi d^4}$

Or $\alpha = \dfrac{d\theta}{\dfrac{D}{2}d\varphi}$; par conséquent $\dfrac{16FD}{G\pi d^4} * \dfrac{D}{2} d\varphi = d\theta = \dfrac{df}{D/2}$; En intégrant : $\boxed{f = \dfrac{8FD^3}{Gd^4} n}$

Q2 $\boxed{k = \dfrac{F}{f} = \dfrac{Gd^4}{8nD^3}}$

Q3 $\boxed{\tau_{\max} = \dfrac{M_t}{I_G} * \dfrac{d}{2} = \dfrac{8FDd}{\pi d^4}}$