

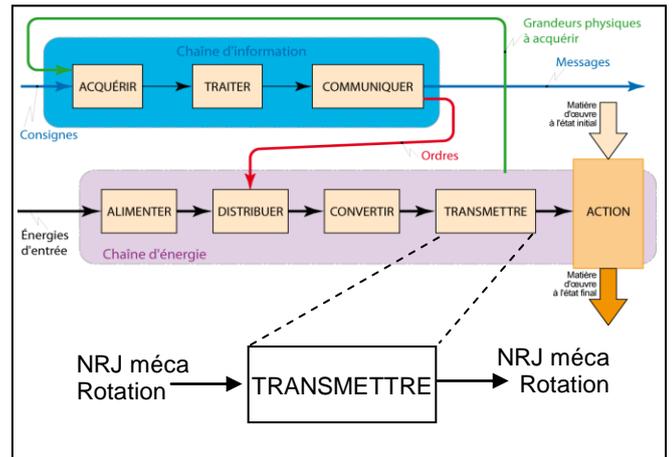
Engrenages 1 - étude géométrique

1 Généralités

Les engrenages sont des **transmetteurs de puissance mécanique**, très utilisés dans les boîtes de vitesse, les réducteurs, les renvois d'angle ...

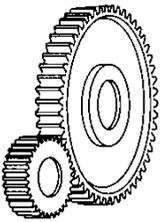
En vue de limiter les pertes, les engrenages réalisent l'**entraînement par obstacle** (les dents des engrenages), ce qui permet la transmission de **couples plus importants**.

Remarque : on appelle **surfaces primitives** d'un engrenage les surfaces « des roues de friction fictives » donnant les mêmes lois cinématiques que l'engrenage considéré.



1.1 Différentes technologies d'engrenages

o les engrenages cylindriques à dentures droites :



transmission de mouvement entre arbres d'**axes parallèles**,

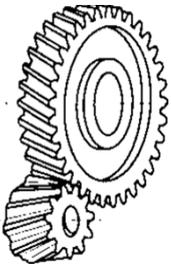
bon rendement ($\eta = 0.98$), simple et économique,

applications : électroménager, réducteur, outillage...

⇒ applications de type cinématique (rapport de réduction 1 à 40),

surfaces primitives : des cylindres d'axes parallèles.

o les engrenages cylindriques à dentures hélicoïdales :



transmission de mouvement entre arbres d'**axes parallèles**,

rendement moins bon ($\eta = 0.96$), meilleure progressivité, plus silencieux, toujours en prise,

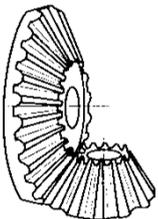
applications : boîte de vitesse, réducteur...

⇒ applications de type transmission de puissance,

surfaces primitives : des cylindres d'axes parallèles.

remarque : parfois utilisés pour transmettre le mouvement entre des arbres d'**axes non parallèles**, ils sont alors appelés **engrenages gauches**.

o les engrenages coniques :



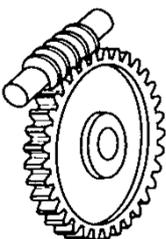
transmission de mouvement entre arbres d'**axes concourants**,

rendement moyen,

applications : renvoi d'angle, différentiel...

surfaces primitives : des cônes de sommets confondus et d'axes concourants.

o le système roue et vis sans fin :



transmission de mouvement entre arbres d'**axes orthogonaux non concourants**,

rendement faible ($\eta = 0.4$ à 0.7 selon les matériaux), irréversibilité,

applications : réducteur, levage...

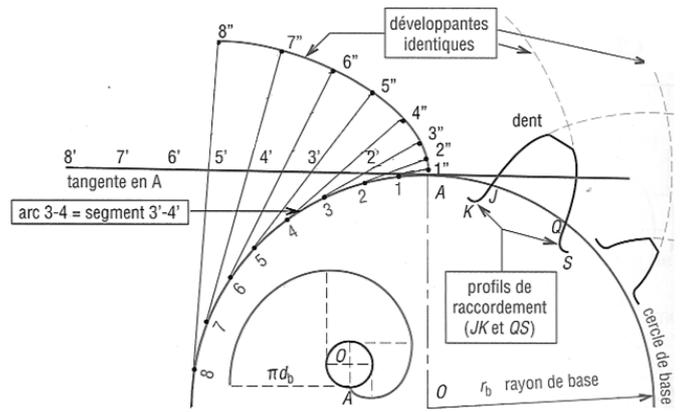
⇒ applications de type transmission de puissance avec grand rapport de réduction 10 à 100,

surfaces primitives : des cylindres d'axes orthogonaux non concourants.

1.2 Profil en développante de cercle : propriétés et intérêts

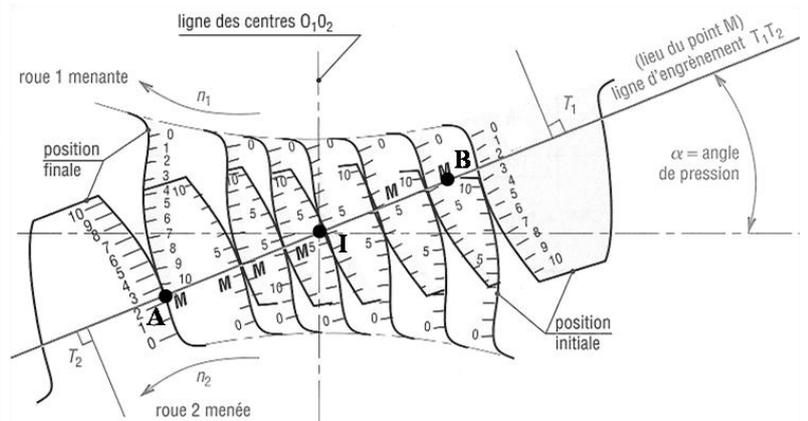
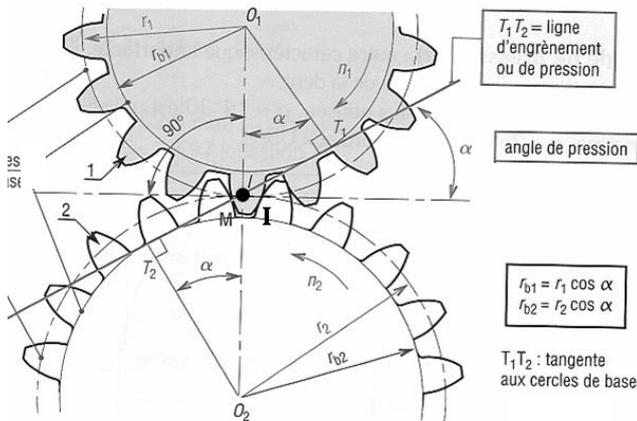
Dans la plupart des applications et quelle que soit la technologie d'engrenage retenue (dentures droites, hélicoïdales, conique ou roue vis sans fin) les profils des dents sont **en développante de cercle**.

Ce profil est obtenu en considérant le roulement sans glissement d'une droite sur le **cercle de rayon de base** de l'engrenage. Dans le cas de la figure ci-dessous, en faisant rouler sans glisser la droite 8'A sur le cercle de rayon de base r_b , 8' vient en 8 et le point A passe par l'ensemble des points 1'', 2'', ... 8'' décrivant le profil en développante de cercle, avec $8A = 8'A = 88''$.



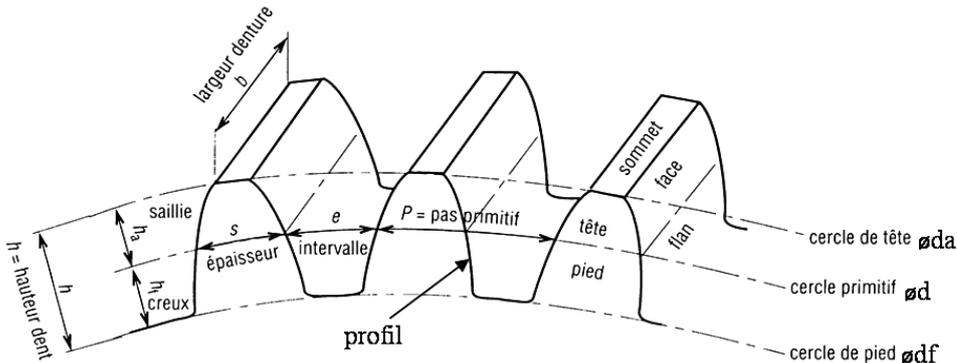
Intérêt :

Lors de l'engrènement, le contact se réalise le long d'une **droite fixe** appelée **ligne d'action** ou **ligne d'engrènement**, définie par l'angle de pression α (fig. ci-dessous) \Rightarrow pas de variation des directions des efforts, donc limitation des vibrations.



2 Engrenages cylindriques à dentures droites

2.1 Terminologie des engrenages cylindriques à dentures droites



Désignation	Symbole	Formule
Module	m	en mm, il est déterminé par un calcul de résistance des matériaux (épaisseur de dent) + Norme
Nombre de dents	Z	déterminé par le rapport des vitesses
Diamètre primitif	d	$d = m Z$
Pas primitif	p	$p = \pi m = \pi d / Z$
Largeur de denture	b	$b = k m$ ($7 < k < 12$)
Saillie, Creux	ha, hf	$ha = m, hf = 1,25 m$
Hauteur de dent	h	$h = ha + hf = 2,25 m$
Diamètre de tête, de pied	da, df	$da = d + 2 m, df = d - 2,5 m$

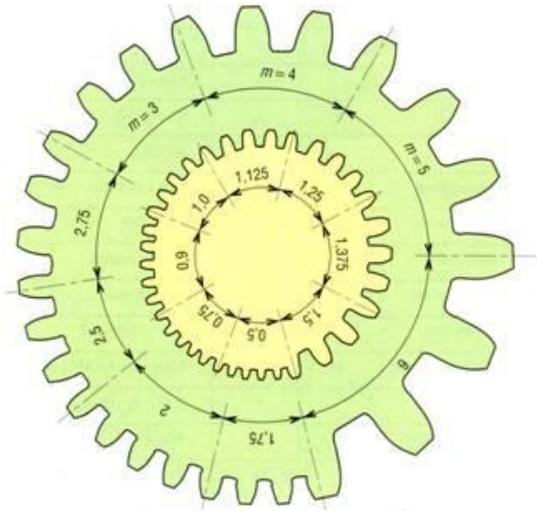
Le **diamètre primitif** est tel que l'épaisseur de la dent et le creux ont même valeur : $s = e$

Une roue dentée est caractérisée par son **module**. Il est tel que le pas, sur le diamètre primitif, vaut $p = \pi m$

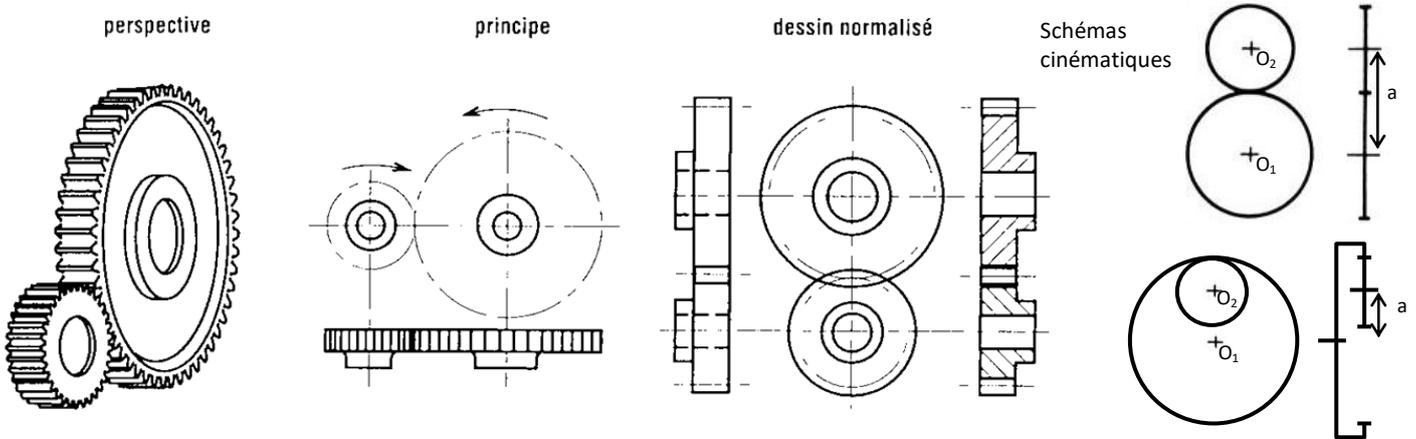
Le module caractérise «l'épaisseur» d'une dent. Il se détermine en fonction de la puissance (et donc des efforts) à transmettre (voir cours RDM 2^{ème} année).

Ci-contre on peut visualiser l'évolution de l'épaisseur de la dent pour un même diamètre primitif, en fonction du module.

Le module est normalisé (ci-contre quelques valeurs normalisées du module).



2.2 Dessin normalisé des engrenages cylindriques à dentures droites



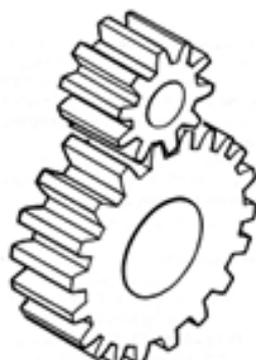
2.3 Propriétés des engrenages cylindriques à dentures droites

Condition d'engrènement : les roues dentées doivent être de **même module** $m \Rightarrow$ succession du contact assuré, pas de choc.

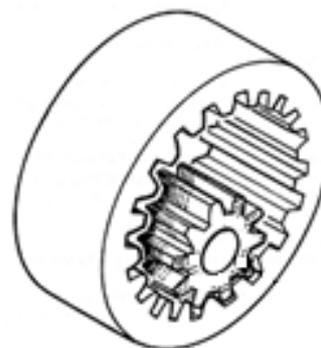
L'**entraxe** d'un engrènement $a = O_1O_2$, est tel que : $a = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = m \frac{(Z_1 + Z_2)}{2}$ pour contact extérieur,

$a = \frac{(d_1 - d_2)}{2} = m \frac{(Z_1 - Z_2)}{2}$ pour un contact intérieur.

Contact extérieur



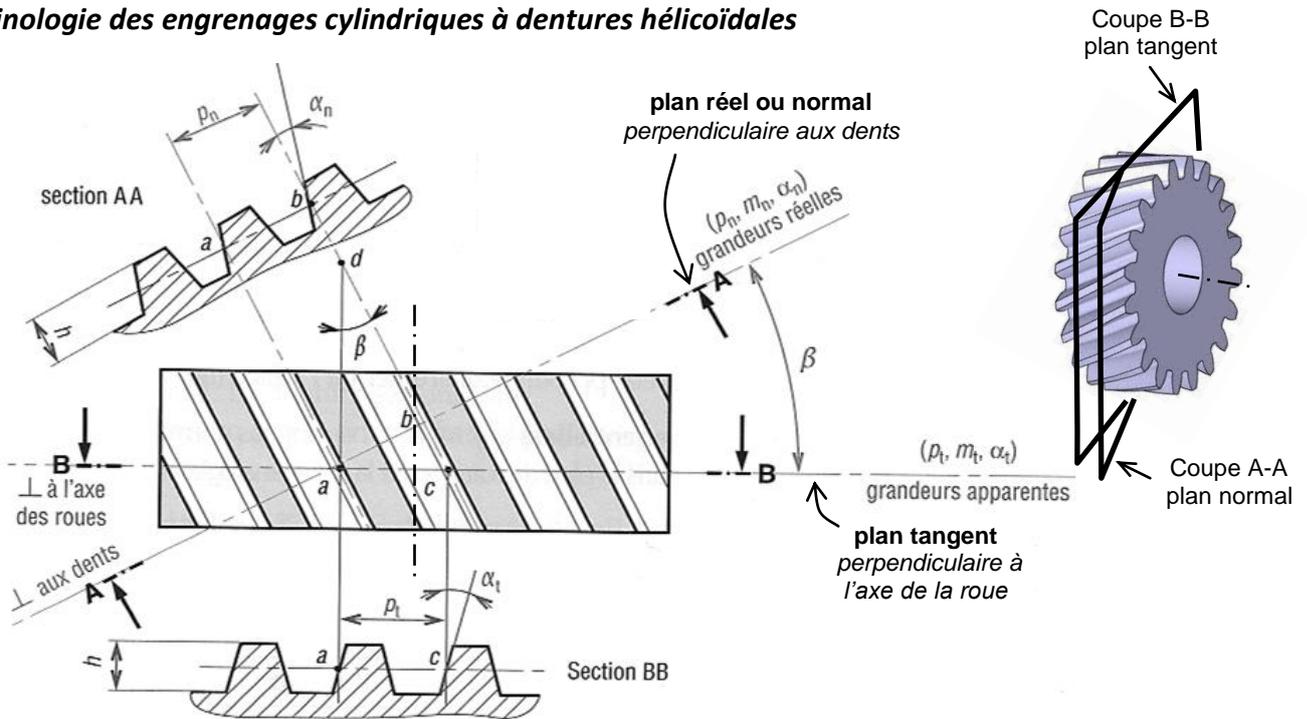
Contact intérieur



3 Engrenages cylindriques à dentures hélicoïdales

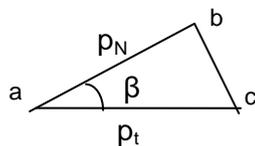
Par rapport aux engrenages précédents, le contact entre les dents est un segment de droite incliné d'un angle β , appelé *l'angle d'hélice* ($\beta = 20$ à 40°), par rapport à l'*axe des roues dentées*.

3.1 Terminologie des engrenages cylindriques à dentures hélicoïdales



Désignation	Symbole	Formule
Angle d'hélice	β	Valeurs usuelles $20^\circ \leq \beta \leq 40^\circ$
Module réel (normal)	m_N	en mm, il est déterminé par un calcul de résistance des matériaux . Valeur normalisée.
Pas réel	p_N	$p_N = \pi m_N$
Module apparent	m_t	$m_t = m_N / \cos(\beta)$
Pas apparent	p_t	$p_t = \pi m_t = p_N / \cos(\beta)$
Diamètre primitif	d	$d = m_t Z = m_N Z / \cos(\beta)$
Angle de pression réel	α_N	Valeur usuelle $\alpha_N = 20^\circ$
Angle de pression apparent	α_t	$\tan(\alpha_t) = \tan(\alpha_N) / \cos(\beta)$
Largeur de denture	b	$b > 2 p_t / \tan(\beta)$ (continuité et progressivité assurées)
Les autres grandeurs sont identiques à celles des engrenages à dentures droites avec $m = m_N$.		

Le diamètre primitif vaut : $d = m_t Z$, mais c'est le module normal qui est connu de par la fabrication de la roue. On a :



soit

$$p_N = p_t \cdot \cos(\beta)$$

$$m_t = m_N / \cos(\beta)$$

3.2 Propriétés des engrenages cylindriques à dentures hélicoïdales

1 ► intérêts des dentures hélicoïdales (% aux dentures droites) :

la surface de contact est plus importante \Rightarrow transmission de couples élevés possible,
le fonctionnement est sans choc car l'engrènement est plus **progressif** \Rightarrow **bruit réduit**.

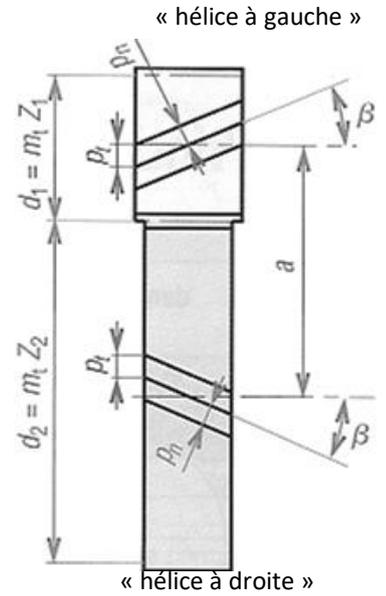
2 ► inconvénients des dentures hélicoïdales (% aux dentures droites) :

création d'une **composante de force axiale** de valeur augmentant si β augmente, **rendement moins bon** car plus de glissement.

Conditions d'engrènement : les roues dentées doivent être de **même module réel m_N** et de **même valeur d'angle d'hélice β** , avec :

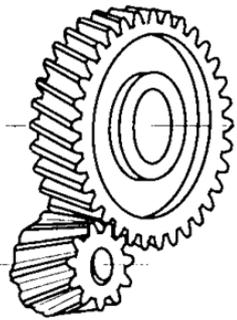
- pour un contact extérieur $\beta_1 = -\beta_2$ (sens des hélices opposés),
- pour un contact intérieur $\beta_1 = \beta_2$ (sens des hélices identiques).

L'entraxe est tel que
$$a = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = m_t \frac{(Z_1 + Z_2)}{2} = m_N \frac{(Z_1 + Z_2)}{2 \cos(\beta)}$$

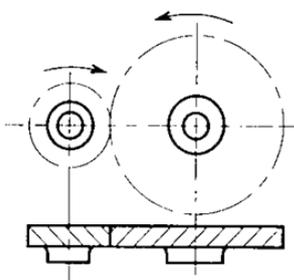


3.3 Dessin normalisé des engrenages à dentures hélicoïdales

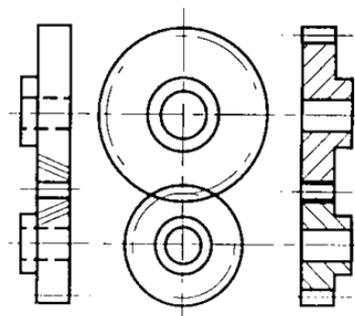
perspective



principe



dessin normalisé



Représentation cinématique d'une roue dentée hélicoïdale

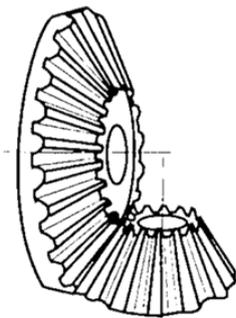


4 Engrenages coniques

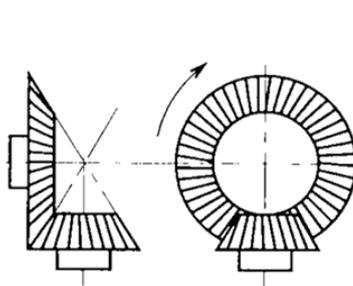
Les engrenages coniques sont des engrenages à **axes concourants** (orthogonaux ou non).

4.1 Dessin normalisé des engrenages coniques

perspective



principe



dessin normalisé

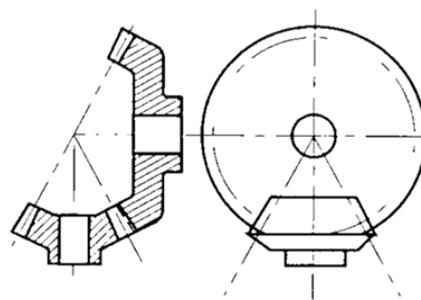
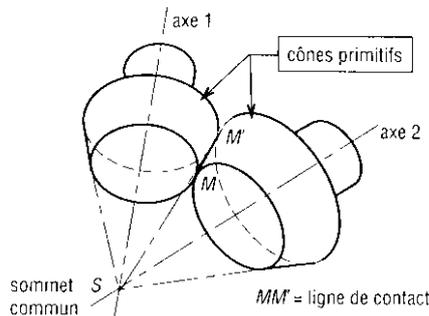
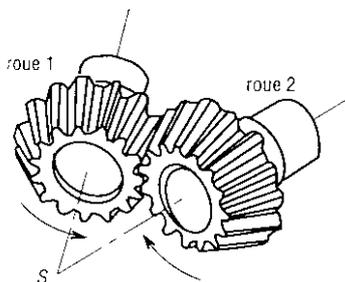
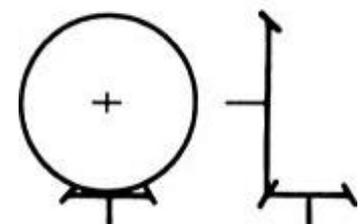
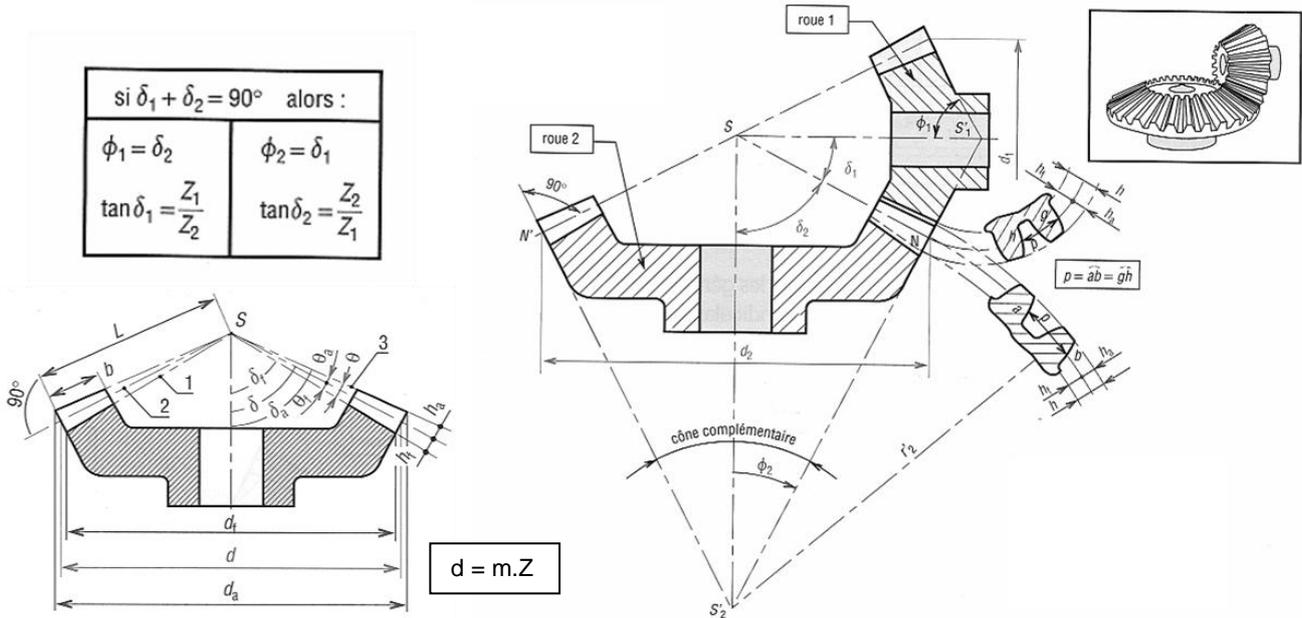


Schéma cinématique



4.2 Terminologie des engrenages coniques à dentures droites ou hélicoïdales



Les caractéristiques des engrenages coniques sont similaires à celles des engrenages cylindriques à dentures droites ou hélicoïdales.

4.3 Propriétés des engrenages coniques

1 ► intérêts des engrenages coniques :

transmission du mouvement et de la puissance entre des arbres d'**axes concourants** (orthogonaux ou non),
intérêts des engrenages cylindriques à dentures droites ou hélicoïdales.

2 ► inconvénients des engrenages coniques :

inconvénients des engrenages cylindriques à dentures droites ou hélicoïdales,

les sommets des cônes primitifs doivent être confondus, ce qui nécessite une grande **précision de mise en position axiale**

⇒ prévoir des cales de réglages et des boîtiers assurant la mise en position axiale des arbres.

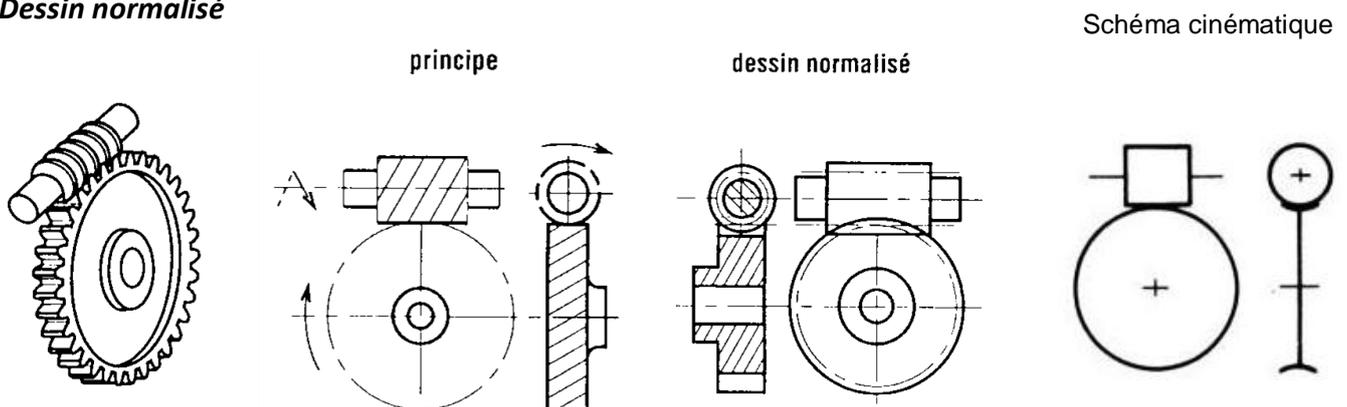
Conditions d'engrènement :

- les roues dentées coniques à **dentures droites** doivent être de **même module m, de sommets confondus et de même tangente commune**,
- les roues dentées coniques à **dentures hélicoïdales** doivent être de **même module réel m_N , de sommets confondus, de même tangente commune et de même angle d'hélice β mais de sens opposé**.

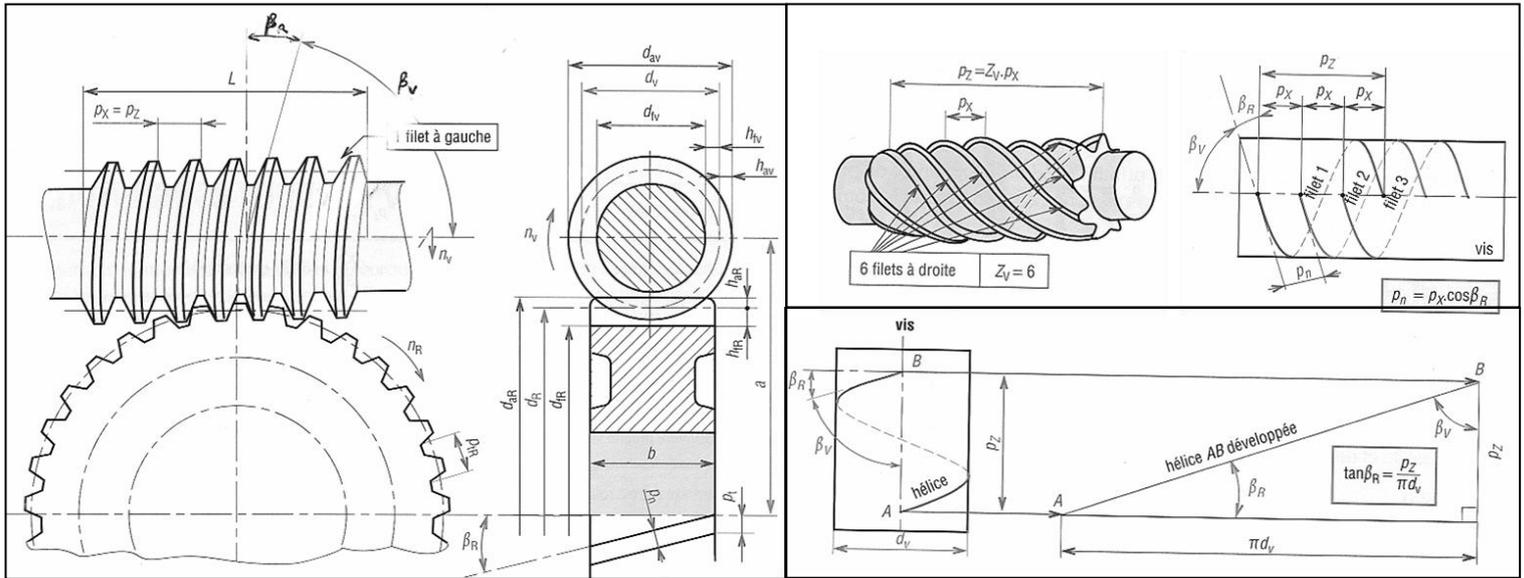
5 Roue et vis sans fin

C'est un engrenage de type **dentures hélicoïdales** où les **axes sont orthogonaux et non concourants**, utilisé pour les grands rapports de réduction et pour ses propriétés d'**irréversibilité**.

5.1 Dessin normalisé



5.2 Terminologie des systèmes roue et vis sans fin



Désignation	Symbole	Formule
Nombre de filet de la vis	Z_V	
Angle d'hélice de la vis	β_V	$\beta_V + \beta_R = 90^\circ$, irréversible si $\beta_R \leq \phi$ (angle de frottement)
Angle d'hélice de la roue	β_R	
Pas axial de la vis	p_{XV}	$p_{NV} / \sin(\beta_V) = p_{NV} / \cos(\beta_R) = p_{NR} / \cos(\beta_R)$
Pas de l'hélice de la vis	p_{ZV}	$p_{ZV} = p_{XV} \cdot Z_V$ et en fonction de β_R : $p_{ZV} = \pi \cdot d_v \cdot \tan(\beta_R)$

Mêmes relations entre modules apparents, réels, diamètres primitifs... que pour dentures hélicoïdales

5.3 Propriétés des systèmes roue et vis sans fin

1 ► intérêts de la roue et vis sans fin

grand rapport de réduction 10 à 100, couple transmissible important, silencieux,

irréversibilité permise : dans le cas où $\beta_R < \phi$, où ϕ est l'angle de frottement entre les deux flancs ($\phi = 6^\circ$ à 10°) alors la roue ne peut pas être menante \Rightarrow **sécurité** des systèmes de levage, de fermeture.

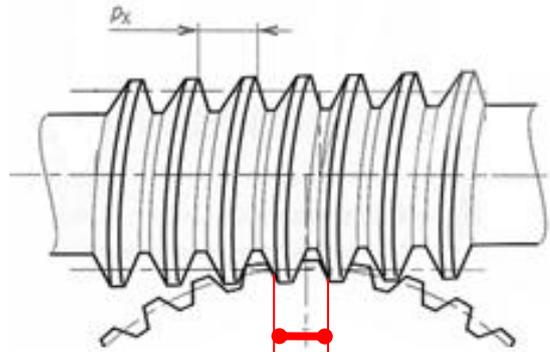
2 ► inconvénient de la roue et vis sans fin

la surface de contact est plus importante que pour les autres technologies d'engrenage \Rightarrow **rendement faible** ($\eta = 0.4$) si on n'y prend pas garde \Rightarrow **choix de matériau spécifique et surfaces soignées** (rectification).

Conditions d'engrènement :

- les axes de la vis et de la roue doivent être orthogonaux $\Rightarrow \beta_R + \beta_V = 90^\circ$,
- le pas de vis axial $p_{XV} = p_{ZV} / Z_V$ doit être égal au pas apparent de la roue $p_{rR} = \pi m_{NR} / \cos(\beta_R)$
 $\Rightarrow p_{XV} = p_{rR}$ ou encore $p_{NV} = p_{NR}$ (même module réel m_N),
- les angles d'hélice doivent être de même sens.

L'entraxe est tel que
$$a = \frac{(d_V + d_R)}{2} = \frac{m_N}{2} \left(\frac{Z_V}{\sin(\beta_R)} + \frac{Z_R}{\cos(\beta_R)} \right)$$



Pas axial (apparent) vis = Pas apparent roue

Engrenages 2 - étude cinématique

A la fin de ce cours, vous devez être capable de :

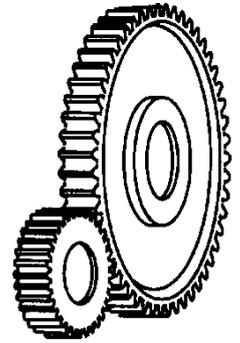
- déterminer la loi entrée/sortie d'un *train d'engrenages*,
- déterminer par la *méthode de Willis* la loi entrée/sortie d'un *train épicycloïdal*.

1. Les engrenages

On appelle engrenage un couple de deux *roues dentées* qui engrènent ensemble.

Fonction principale : transmettre par *obstacle* (contact linéique entre des dents) le *couple* (C en Nm) et le *mouvement de rotation* (ω en rad/s) d'un arbre d'entrée vers un arbre de sortie.

La transmission de puissance ($P = C \cdot \omega$) est réalisée en augmentant (cas des *multiplicateurs*) ou inversement en diminuant (cas des *réducteurs*) la vitesse de rotation. Au rendement η près, cette augmentation, respectivement diminution, de la vitesse de rotation entraîne une diminution, respectivement une augmentation, du couple transmis.



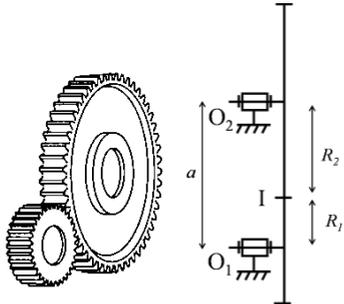
$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{C_s \cdot \omega_s}{C_e \cdot \omega_e} = \frac{C_s}{C_e} \cdot r$$

où : P_s est la puissance de sortie et P_e la puissance d'entrée en **Watt**
 r le rapport de vitesse **sortie/entrée**
 C_s, C_e couples en **N.m**
 ω_s, ω_e vitesses de rotation angulaires en **rd/s**

2. Loi entrée/sortie d'un engrenage

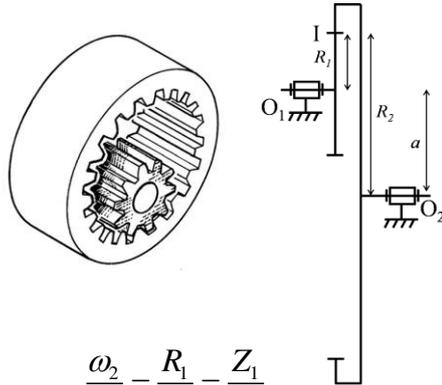
Cas des engrenages cylindriques (ou à axes parallèles)

contact extérieur



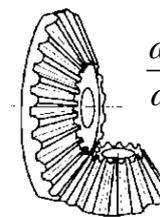
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

contact intérieur

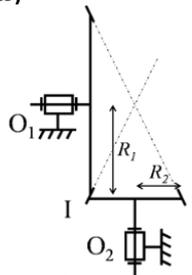


$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

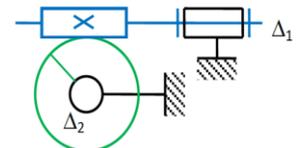
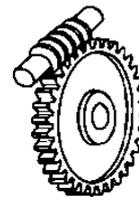
Cas des engrenages coniques (ou à axes concourants)



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$



Cas des roues et vis sans fin (axes non concourants)



$$\frac{\omega_{Roue}}{\omega_{Vis}} = \frac{Z_{filet}}{Z_{Roue}} \left(\neq \frac{R_{Vis}}{R_{Roue}} \right)$$

Ces lois entrée/sortie sont valables pour tous les types de dentures : *droites* ou *hélicoïdales*.

3. Loi entrée/sortie d'un train d'engrenages à axes parallèles

D'une manière générale, le rapport de réduction d'un train engrenages simple peut être déterminé à l'aide de la relation suivante, où n correspond au nombre de contact extérieur entre roues :

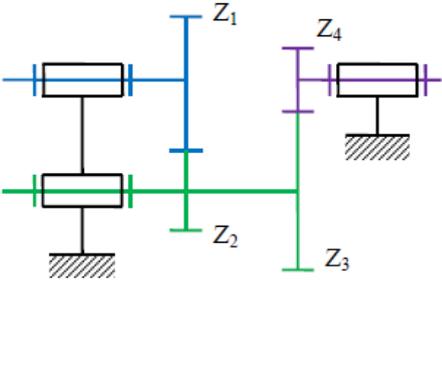
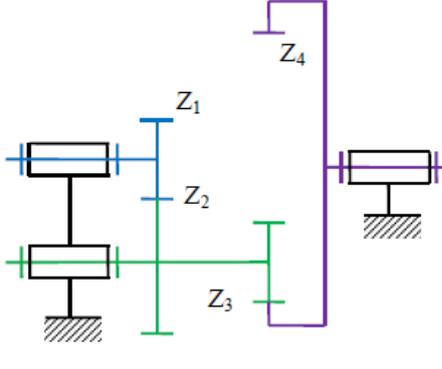
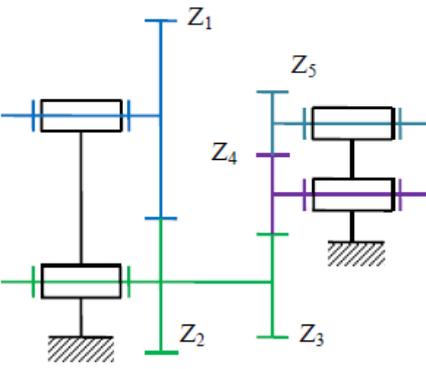
$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produits du nombre de dents des roues menantes}}{\text{Produits du nombre de dents des roues menées}}$$

où n représente le nombre de contact extérieur

On qualifie de « *roue menante* » une roue motrice dans un engrenage, et de « *roue menée* » une roue réceptrice dans un engrenage.

Remarque : le train d'engrenage est *réducteur* si $|\omega_s / \omega_e| < 1$, *multiplicateur* si $|\omega_s / \omega_e| > 1$

Le tableau ci-dessous décrit trois configurations courantes. On peut remarquer, pour ces trois configurations, que les axes des différentes roues ont tous une position invariable par rapport au bâti. De telles configurations sont qualifiées de « réducteurs à trains simples ».

		
<p>Rapport de réduction</p>	<p>Rapport de réduction</p>	<p>Rapport de réduction</p>

4. Train épicycloïdal

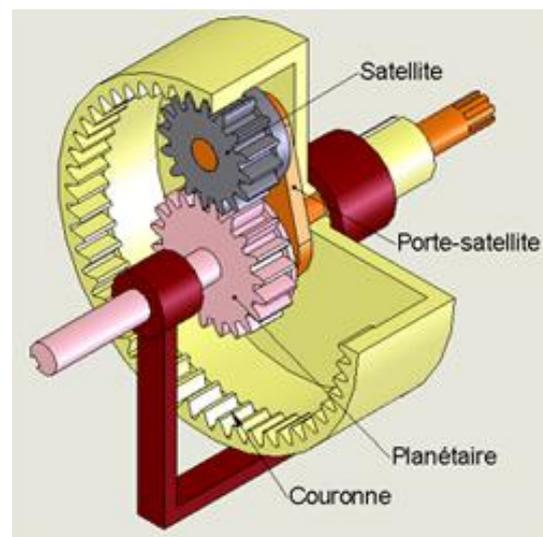
Un train d'engrenage est dit "*train épicycloïdal*" lorsque, au cours du fonctionnement **une ou plusieurs roues dentées tournent autour d'un arbre mobile en rotation**. Ces roues dentées possèdent donc un mouvement relatif de rotation autour de leur axe et un mouvement d'entraînement de rotation autour de l'axe central.

On appelle :

Satellite :

Porte-satellite

Planétaires

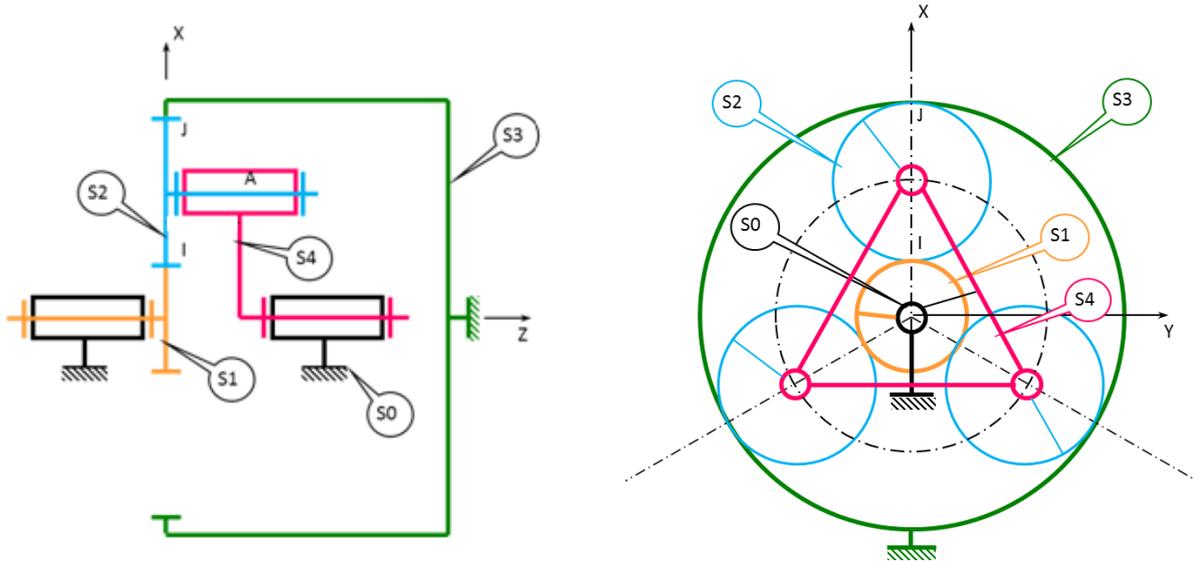


Méthodologie de détermination de la loi entrée/sortie

Selon les applications envisagées, il faut identifier l'(es) entrée(s) et la(les) sortie(s) qui peuvent se faire sur chacun des arbres (*planétaires, satellites* ou *porte-satellite*). Dans tous les cas, la *méthode de Willis* permet de déterminer la(les) loi(s) entrée/sortie.

La *méthode de Willis* est composée de 4 étapes :

- Identification et rôle des différentes roues ,
- détermination de la raison λ du train épicycloïdal,
- obtention de la relation de Willis,
- application au cas étudié.



- **Etape 1 :** identifier les différentes roues constituant le train épicycloïdal (s'assurer que l'on a bien affaire à un train épicycloïdal...)

Satellite :

Porte-satellite :

Planétaires :

Remarques :

- cinématiquement un seul satellite suffit, il y en a trois uniquement pour équilibrer les efforts et réduire les charges,
- on nommera R_i et Z_i les rayon primitif et nombre de dents de la roue i .
- on a la relation géométrique : $R_3 = R_1 + 2 R_2$, donc $Z_3 = Z_1 + 2 Z_2$ car toutes les roues ont nécessairement le même module.

- **Etape 2 :** déterminer la raison λ du train épicycloïdal
Pour cela, on **bloque virtuellement** le porte-satellite et on détermine le rapport des vitesses de rotation **par rapport au porte-satellite** entre les deux planétaires (l'un considéré moteur, l'autre récepteur).

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_3 \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2} = -\frac{Z_3}{Z_1} = \lambda$$

Hyp : roulement sans glissement aux points d'engrènement I et J

- **Etape 3 :** Généralisation - Formule de Willis (« libérer le porte satellite »)

Les arbres sont parallèles, on peut donc écrire :

$$\omega_{i/j} = \omega_{i/0} + \omega_{0/j} = \omega_{i/0} - \omega_{j/0}, \text{ d'où } \frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} = -\frac{Z_3}{Z_1} = \lambda$$

RELATION DE WILLIS :

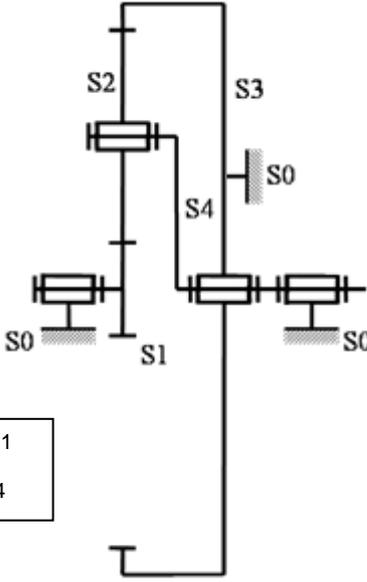
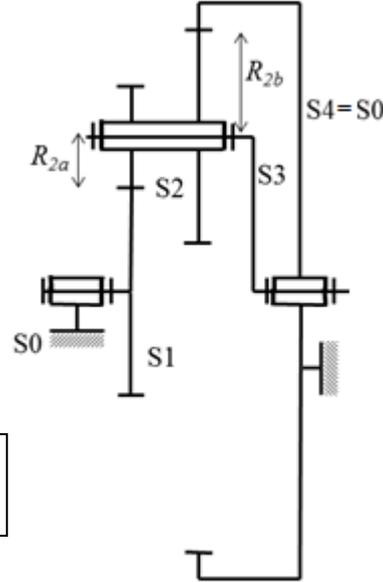
$$\frac{\omega_{PL1/0} - \omega_{PS/0}}{\omega_{PL3/0} - \omega_{PS/0}} = -\frac{Z_3}{Z_1} = \lambda \quad \text{avec } \lambda \text{ raison basique du train.}$$

On remarque qu'il y a **deux mobilités** dans un réducteur. Il faut donc imposer deux vitesses de rotation pour avoir une sortie. A partir du plan d'ensemble ou du schéma cinématique, il faut identifier l'entrée, la pièce éventuellement reliée au bâti et la sortie dans le système considéré.

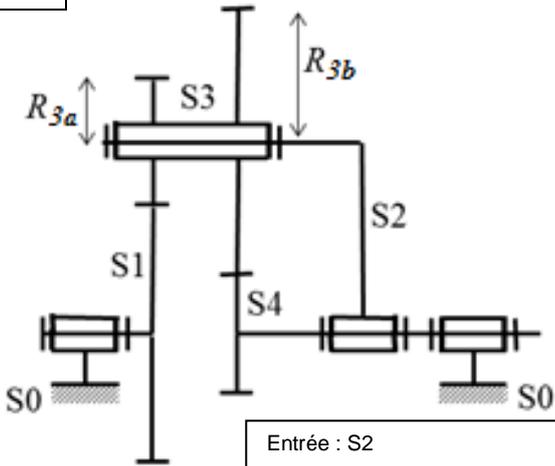
- **Etape 4 :** Selon les applications envisagées, l'entrée et la sortie sont liées aux différents arbres du train épicycloïdal. Le tableau ci-dessous résume quelques-uns des cas usuels de fonctionnement et donne l'expression du rapport des vitesses de rotation.

Applications :

1. Trains à axes parallèles : Les axes de rotation sont tous parallèles.

<div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 10px;">1</div>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> Entrée : S1 Sortie : S4 </div> <p>Satellite :</p> <p>Porte satellite :</p> <p>Planétaires :</p> <p>Relations par rapport au porte satellite :</p> <p>Relation de Willis :</p> <p>Loi entrée-sortie :</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 10px;">2</div>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> Entrée : S1 Sortie : S3 </div> <p>Satellite :</p> <p>Porte satellite :</p> <p>Planétaires :</p> <p>Relations par rapport au porte satellite :</p> <p>Relation de Willis :</p> <p>Loi entrée-sortie :</p>
---	--

3



Entrée : S2
 Sortie : S4
 S1 immobilisé par rapport à S0.

Satellite :

Porte satellite :

Planétaires :

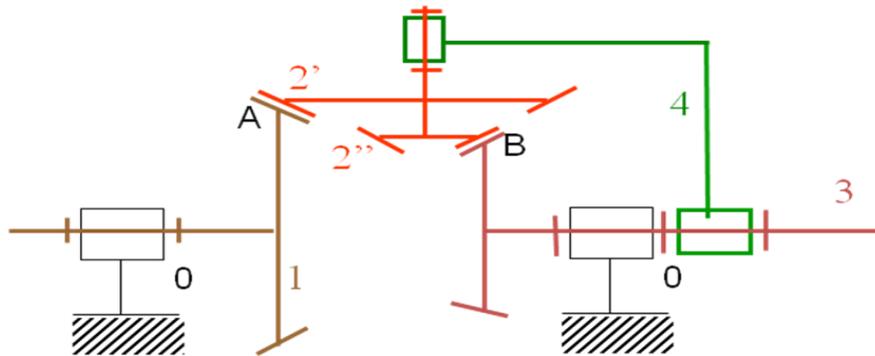
Relations par rapport au porte satellite :

Relation de Willis :

Loi entrée-sortie :

2. Trains sphériques :

Les axes de rotation peuvent être pour certains perpendiculaires.



On applique la même méthodologie, en considérant les relations entre vitesses en valeur absolue, et en adaptant le signe de λ à la fin.