

# ETUDE STATIQUE DES SYSTEMES MECANIQUES

## Buts :

Déterminer l'intensité des efforts s'exerçant sur un système dans le but de :

- Choisir ou valider un actionneur en regard de performances attendues ou d'un cahier des charges
- Justifier des solutions techniques ou apporter des modifications constructives
- Prévoir la résistance mécanique des différentes pièces (cours de résistance des matériaux 2<sup>ème</sup> année).

## 1. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

### Objectifs :

Définir un outil permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur un ensemble.  
Définir les actions mécaniques que peuvent supporter les liaisons élémentaires.

### 1. Action mécanique : définition.

On appelle **action mécanique** toute cause physique susceptible :

- de *maintenir* un corps au repos,
- de *créer*, de *maintenir* ou de *modifier un mouvement*,
- de *déformer* un corps.

Un **corps** représente un *ensemble de matière indéformable*.

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

- Les **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur, champ magnétique)
- Les **actions mécaniques de contact** (action dans les liaisons mécaniques, du fluide dans un vérin, d'un moteur...).

On parlera toujours d'actions mécaniques d'un corps 2 sur un corps 1 : AM 2/1 ou AM 2→1

### 2. Modélisation des actions mécaniques. Torseur statique

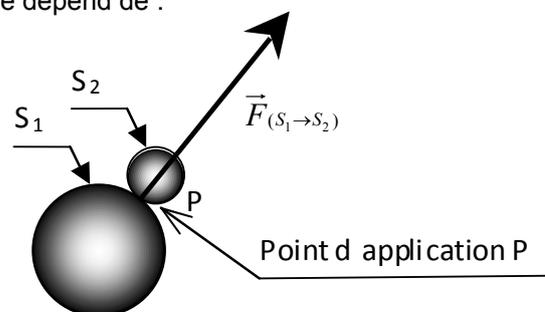
On distingue 2 types d'actions mécaniques :

#### 21. Force

Elle est utilisée pour représenter une action mécanique que l'on peut localiser en un **point**.

L'action mécanique exercée par une force sur une pièce dépend de :

- l'**intensité de la force**,
- la **direction de la force**,
- du **sens de la force**.



L'entité mathématique « **Vecteur** » est, elle aussi, caractérisée par sa Norme, sa Direction et son Sens. Une force sera donc modélisée par un **vecteur**, associé à un Point d'application.

Unité : Une force s'exprime en Newton ( 1 N = 9,81 x 1 kg )

## 22. Moment d'une force en un point

Considérons un utilisateur qui souhaite serrer (ou desserrer) une vis.

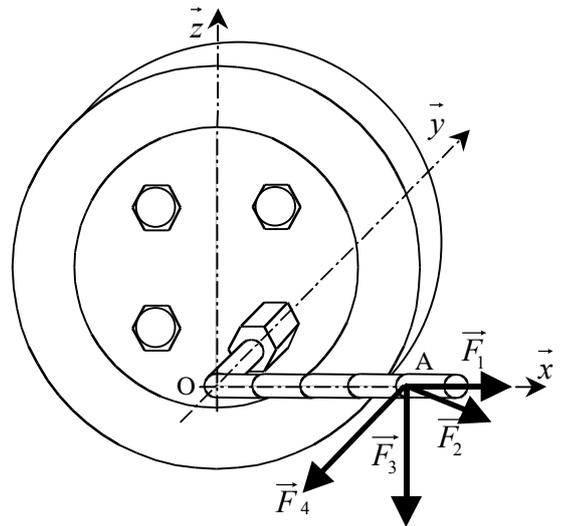
Il positionne sa main au point A et exerce une force  $\vec{F}$ .

L'action mécanique utile est la capacité de  $\vec{F}$  à produire une rotation autour de l'axe (o,y).

Si on exerce une force  $\vec{F}_1$  portée par  $\vec{x}$ , ou  $\vec{F}_4$  portée par  $-\vec{y}$ , l'AM ne tend pas à serrer ou desserrer la vis.

Si on exerce une force  $\vec{F}_2$  portée par  $\vec{x}$  et  $-\vec{z}$ , le serrage semble s'amorcer.

Si on exerce une force  $\vec{F}_3$  intégralement portée par  $-\vec{z}$ . Son action mécanique semble être efficace...



L'exemple précédent montre que les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position du point d'application et de l'orientation dans l'espace (direction et sens) de la force  $\vec{F}$  associée à cette A.M.

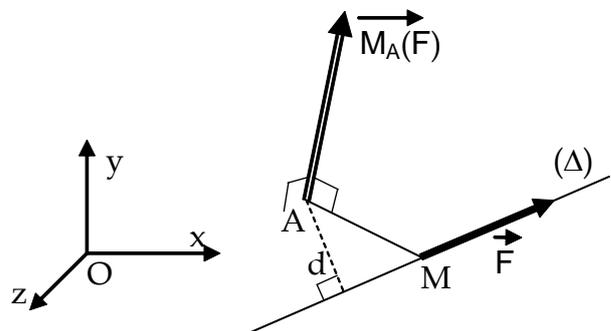
Nous sommes donc conduits à introduire la notion de **moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à un point** pour caractériser complètement l'A.M.

### Définition :

On appelle **moment par rapport au point A de la force  $\vec{F}$**  appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Unité : Newton mètre (N.m)



Ce vecteur moment  $\vec{M}_A(\vec{F})$  sera représenté par une double flèche. Il possède les caractéristiques suivantes :

- Une origine : Le point A
- Une direction : perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{F}$ .
- Un sens : Le trièdre  $(\overrightarrow{AM}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F}))$  est direct.
- Une norme :  $\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot d$

## 23. Torseur d'une action mécanique

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée au point M, et deux points quelconques A et B.

Par définition,  $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$  et  $\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}$

D'après la relation de Chasles  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$

D'où  $\vec{M}_B(\vec{F}) = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{F}$  soit  $\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

Finalement

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{F} \wedge \vec{AB}$$

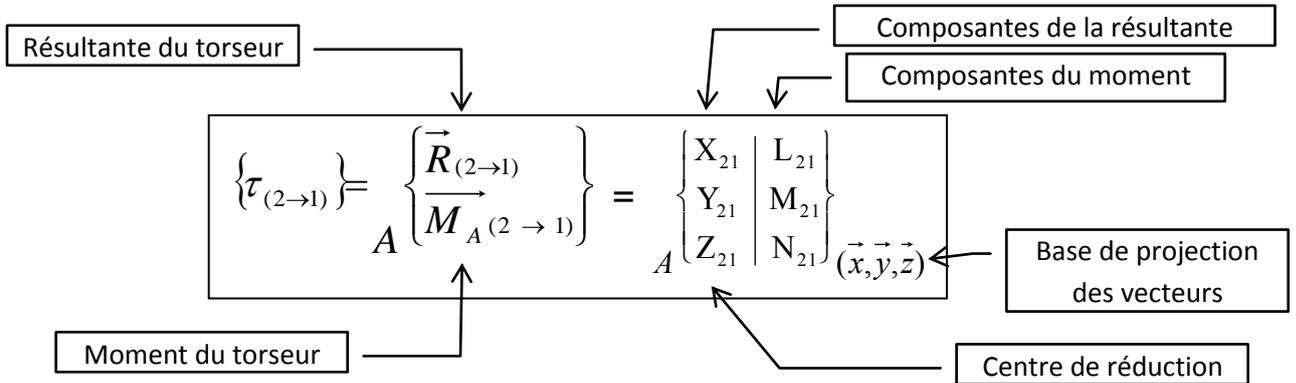
Si on connaît le moment d'une force en un point, on peut calculer ce moment en n'importe quel autre point.

Conséquence :

Une **action mécanique** peut donc être modélisable par :

- une force
- un champ de vecteur vérifiant la loi ci-dessus.

Elle peut donc être modélisée par un torseur, appelé **torseur statique** ou torseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 :



Remarques :

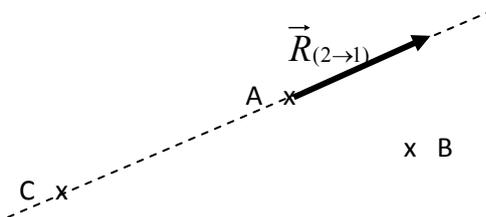
- Le point A est un point quelconque.
- $\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$  et  $\vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)}$  sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur  $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}$ .

Torseurs particuliers :

**Torseur glisseur**

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$



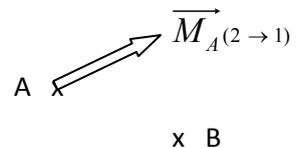
Changement de point :

- Les éléments de réduction d'un torseur glisseur sont les mêmes en tout point de la droite  $(A, \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)})$ .

**Torseur couple**

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$$



Changement de point :

- Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

### 3. Principe des actions mutuelles

L'action mécanique de 2/1 est l'opposée de l'action mécanique de 1/2 :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\} = - \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)} \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = -\vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \quad \text{et} \quad \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) = -\vec{M}_A(1 \rightarrow 2)$$

### 4. Modélisation des actions transmissibles dans les liaisons

#### 4.1. Hypothèses

Une liaison parfaite entre deux solides 1 et 2 est caractérisée par :

- Des surfaces de liaison géométriquement parfaites et indéformables ;
- Des ajustements sans jeu ;
- Des contacts sans frottement.

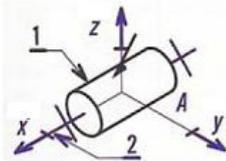
#### 4.2. Relation avec les degrés de liberté d'une liaison

Si un mouvement de translation est possible suivant un axe, alors l'AM force n'a pas de composante sur cet axe.

Si un mouvement de rotation est possible autour d'un axe, alors l'AM moment n'a pas de composante sur cet axe.

#### 4.3. Exemple

Pour la liaison pivot d'axe  $(A, x)$  :



$T_x=0$	$R_x=1$
$T_y=0$	$R_y=0$
$T_z=0$	$R_z=0$

$$\rightarrow \left\{ T_{S1/S2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{M}_{1/2}(A) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{array} \right\}_R$$

Il y a donc une dualité entre les torseurs cinématique et statique.

$$\text{Torseur cinématique : } \left\{ V_{S1/S2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/2} \\ V(A, S1/S2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_R$$

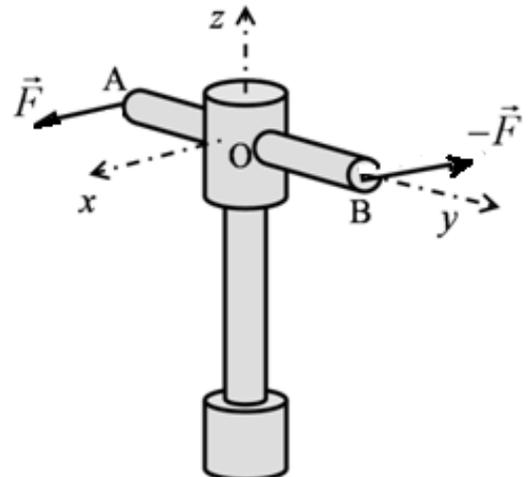
**Attention les colonnes s'inversent !**

#### 4.4. Tableau des actions transmissibles par les liaisons simples parfaites (voir annexe)

#### Exercice :

Une clé à bougie C subit d'une main M une action mécanique représentée simultanément par :

- une action en A,  $\left\{ T_{A \text{ main / clé}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$
- une action en B,  $\left\{ T_{B \text{ main / clé}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$



Montrer que l'action mécanique résultante peut s'écrire sous la forme d'un torseur couple. Donnée :  $\vec{AO} = \vec{OB} = R \cdot \vec{y}$

## 2. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

### Objectifs :

Déterminer les actions mécaniques qui s'exercent sur un système, en vue de choisir ou valider les solutions techniques à partir de performances attendues ou d'un cahier des charges.

### Introduction :

La **statique** est une partie de la mécanique dont la finalité est l'étude de l'équilibre des systèmes matériels (solide ou ensemble de solides) **au repos ou en mouvement uniforme** par rapport à un repère supposé fixe (un repère Galiléen).

En fait, la statique (solides au repos) n'est qu'un particulier de la dynamique (solides en mouvement quelconque). En toute logique, et si nous possédions de bonnes connaissances mathématiques, il nous faudrait commencer par étudier la dynamique pour en déduire la théorie concernant le cas particulier qu'est la statique...

## 1 Définitions

### Système matériel :

Tout ensemble de matière de **masse constante** sera considéré comme un système matériel.

### Exemples :

- Un ressort est un système matériel
- 2 solides articulés, en mouvement entre eux, forment un système matériel.
- Un fluide dans une enceinte fermée, sans écoulement, est un système matériel

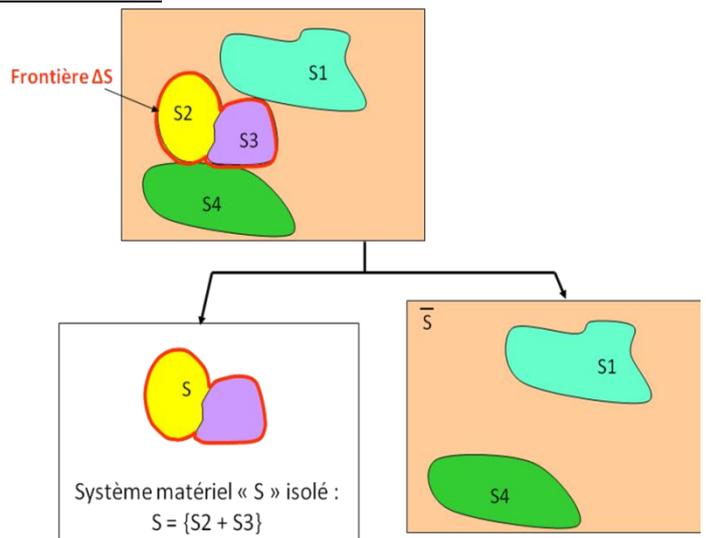
### Action mécanique intérieure ou extérieure à un système matériel :

Soit un système mécanique formé de solides  $S_i$ .

**Isoler un système matériel « S »**, c'est définir une frontière fictive  $\Delta S$  qui sépare le système « S » de ce qui est extérieur à « S », noté «  $\bar{S}$  »

Les **actions mécaniques extérieures** qui agissent sur l'ensemble S sont :

- Poids de l'ensemble (Action Mécanique à distance : Poids de  $S_3$  et  $S_2$ ).
- Actions mécaniques de contact exercées par  $S_1$  et  $S_4$  sur l'ensemble S (Actions Mécaniques de contact).



L'action mécanique de S2 sur S3 est une **action mécanique intérieure** au système matériel S.

## 2 Equilibre d'un système matériel

Un système matériel {E} est en **équilibre** par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de {E} conserve une position fixe par rapport au repère R.

## 3 Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Si un ensemble matériel {E} est en **équilibre** par rapport à un repère R, **la somme des actions mécaniques extérieures à {E} qui agissent sur {E} est nulle.**

Soit S un système matériel isolé. Notons  $\bar{S}$  tout ce qui est extérieur à S.

Alors le **PFS** se traduit par la relation suivante :

$$\left\{ \tau_{(\bar{S} \rightarrow S)} \right\} = \{0\}$$

On peut déterminer ce torseur en sommant tous les torseurs de toutes les actions mécaniques de l'extérieur sur S. Mais pour pouvoir être sommés, les moments **doivent être écrits au même point**.

Cette relation peut se décomposer en deux relations entre des vecteurs :

**Théorème de la Résultante :**

La somme vectorielle de toutes les forces extérieures à S, agissant sur S est nulle :

$$\vec{R}_{(\bar{s} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_{(s_i \rightarrow S)} = \vec{0}$$

**Théorème du moment résultant en A:**

La somme vectorielle des moments en A de toutes les actions mécaniques extérieures à S, agissant sur S, est nulle en un point A quelconque :

$$\vec{M}_{A(\bar{s} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{A(s_i \rightarrow S)} = \vec{0}$$

**4 Méthodologie d'étude statique d'un système mécanique**

Une méthode systématique consiste à isoler successivement tous les ensembles cinématiques d'un système, **sauf le bâti**. (l'isolement du bâti entraîne en général 6 inconnues statiques de liaison encastrement du bâti avec l'environnement extérieur. Il n'en résulte donc pas d'équation permettant de calculer les actions mécaniques à l'intérieur du système).

Pour chaque système isolé :

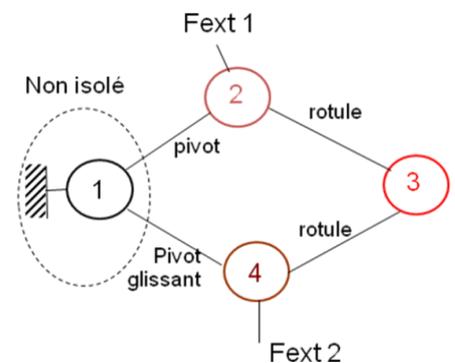
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à ce système
- Ecrire le torseur des actions mécaniques aux points correspondants au contact ou au centre des liaisons
- Ecrire tous les torseurs en un même point
- Projeter les 2 équations des forces et moments dans un repère. Il en résulte au maximum 6 équations scalaires pour un problème dans l'espace, 3 équations scalaires maximum pour un problème plan (voir chapitre 3).
- Résoudre.

Conseils de résolution :

- Avant de se lancer dans des calculs longs, il peut être utile de faire le bilan du nombre d'inconnues statiques et du nombre d'équations qu'on pourra espérer écrire. Voir paragraphe 5.
- Le graphe de liaison est un outil très utile pour recenser le nombre de solides à isoler, pour faire l'inventaire des actions mécaniques de liaison, pour faire apparaître les actions extérieures au système, pour orienter notre recherche sur la chronologie des isolements judicieux.
- Il vous sera rarement demandé de déterminer l'ensemble des inconnues *force* et *moment* en tout point d'un mécanisme.

La stratégie d'étude qui consiste à isoler chacun des solides du mécanisme et à décrire systématiquement leur équilibre pour obtenir un système de n équations scalaires est donc à **éviter** car très lourde.

- repérer :
  - les plans de symétrie qui permettent de simplifier l'étude (voir Ch. 3)
  - les solides (ou ensembles de solides) soumis à 2 glisseurs, ce qui permet de lever l'inconnue de la direction des efforts (voir TD)



- déterminer un isolement coupant sur le graphe de liaison un maximum d'actions mécaniques connues et un minimum d'actions mécaniques inconnues ou non recherchées.
- Prévoir et n'écrire que les équations nécessaires.
- Choisir judicieusement le point d'écriture des moments. Un point en lequel le moment d'une force inconnue est nul est souvent pertinent.
- Déplacer les torseurs ayant le moins de composantes non nulles.

## 5 Notion d'hyperstaticité d'une modélisation d'un système mécanique

Il n'est pas toujours possible de déterminer l'ensemble des inconnues en réalisant l'étude statique d'un système mécanique. La modélisation du système est alors dite *hyperstatique*. D'un point de vue mathématique, un modèle sera *hyperstatique* s'il contient plus d'inconnues que d'équations scalaires permettant de les déterminer.

D'une manière générale, le degré d'hyperstaticité  $h$  d'une modélisation d'un système est donné par la formule suivante :

$$h = I_S - (E_S - m_C)$$

Remarque :

la quantité  $E_S - m_C$  correspond au nombre « d'équations utiles » du système, donc au rang du système à résoudre.

avec :

- $I_S$  : la somme des inconnues *statiques* du système étudié,
- $E_S$  : le nombre « d'équations statiques »,

$$E_S = 3(N_P - 1) \text{ pour les systèmes plans}$$

$$E_S = 6(N_P - 1) \text{ pour les systèmes spatiaux}$$

$N_P$  : nombre de « classes d'équivalence cinématique » du mécanisme étudié (bâti ou corps fixe compris),

- $m_C$  : le nombre de *mobilité cinématique*, défini comme la somme du nombre de lois entrée/sortie du mécanisme (souvent une) et du nombre de *mobilités internes* (mouvement relatif de pièces possibles sans influence sur la loi entrée sortie, attention ce mouvement doit être considéré selon la modélisation retenue).

Si  $h=0$ , le modèle est dit **isostatique**, la détermination de l'ensemble des inconnues statiques est possible.

Si  $h \neq 0$ , le modèle est dit **hyperstatique** de degré la valeur de  $h$ , il est alors impossible de déterminer toutes les inconnues des statiques. La détermination de certaines inconnues est néanmoins possible, notamment les relations entre actions mécaniques motrices et réceptrices (loi entrée-sortie de statique).

De nombreux systèmes réels sont par nature *hyperstatique* (ex : chaise en appui sur 4 pieds), technologiquement cela permet d'améliorer la rigidité du système, sa stabilité, la tenue des pièces aux efforts... En contrepartie, cela induit des contraintes au sein du système (même sans sollicitations extérieures) du fait des défauts de fabrication, et nécessite une fabrication plus précise.

On peut rendre « *isostatique une modélisation* » en *reconsidérant la modélisation* de certaines liaisons. Considérer des jeux dans les liaisons, ou petites les surfaces de contact entre les solides permet par exemple de passer d'un modèle de liaison appui-plan vers un modèle de liaison ponctuelle et lève 2 inconnues statiques.

Remarque : il est possible de déterminer  $h$  par une approche « cinématique » :

$$h = E_C - I_C + m_C$$

- $E_C$  : le nombre « d'équations cinématiques »,

$$E_C = 3\gamma = 3(N_L - N_P + 1) \text{ pour les systèmes plans}$$

$$E_C = 6\gamma = 6(N_L - N_P + 1) \text{ pour les systèmes spatiaux}$$

$\gamma$  : nombre de boucles indépendantes du graphe de liaison.

$N_L$  : nombre de liaisons du mécanisme étudié

$N_P$  : nombre de « classes d'équivalence cinématique » du mécanisme étudié (bâti ou corps fixe compris),

- $I_C$  : la somme du nombre d'inconnues *cinématiques* de toutes les liaisons du système étudié.

# 3. APPLICATION AUX PROBLEMES PLANS

## STATIQUE GRAPHIQUE

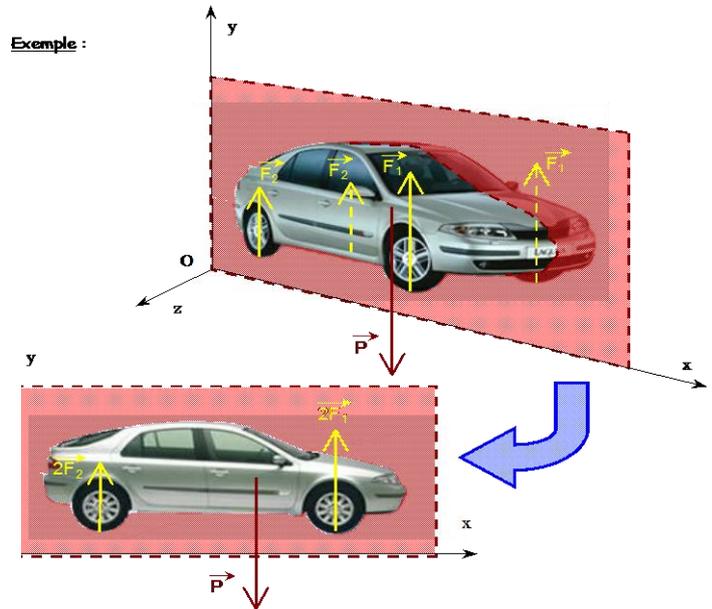
### Objectifs :

- Simplifier la résolution d'un problème de statique en tenant compte de particularités géométriques d'un système.
- Utiliser une méthodologie de résolution graphique.

### 1. Définition d'un problème plan d'un point de vue statique

Un problème sera considéré plan dans un plan P d'un point de vue statique si toutes les liaisons et toutes les actions mécaniques extérieures sont disposées symétriquement par rapport à ce plan.

Alors on peut représenter le solide « sans épaisseur », et considérer que les actions mécaniques dans ce plan sont les résultantes des actions mécaniques réelles disposées symétriquement par rapport à P.

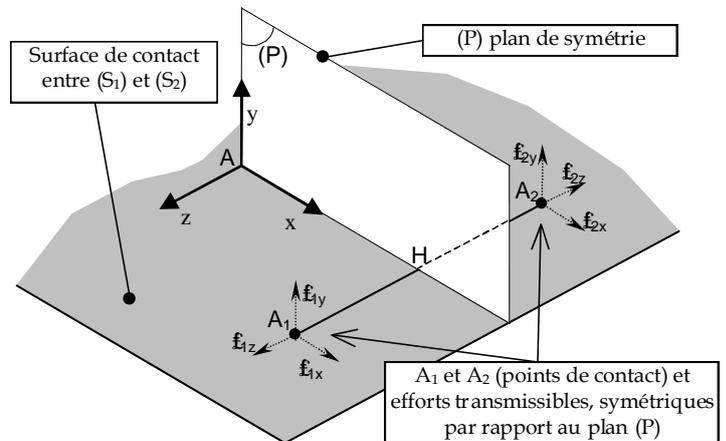


### 2. Simplification

Lorsque les hypothèses précédentes sont réunies, l'écriture des torseurs des différentes actions mécaniques (extérieures ou de liaison) se simplifie. Il subsiste :

- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie,
- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie.

Pour les différentes liaisons, si le plan de symétrie est  $(A, \vec{x}, \vec{y})$  :



Allure générale (3D) :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Simplification :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & \cancel{Y_{21}} \\ Y_{21} & \cancel{M_{21}} \\ \cancel{Z_{21}} & N_{21} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Allure simplifiée (2D) :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & - \\ Y_{21} & - \\ - & N_{21} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Le PFS appliqué à un solide se résume alors à **3 équations scalaires** :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} \cdot \vec{x} &= 0 \\ \sum \vec{F} \cdot \vec{z} &= 0 \\ \sum \vec{M}_A^t \cdot \vec{y} &= 0 \end{aligned}$$

### 3. Résolution analytique

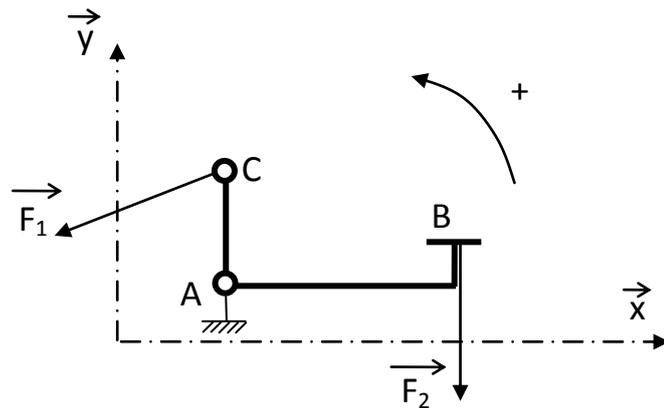
Pour l'exemple ci-dessous, en considérant le plan de symétrie  $(A, x, y)$ , le calcul des moments peut se faire de la manière suivante, plus rapide :

$$\vec{M}_A \cdot \vec{F}_2 =$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{F}_1 =$$

ou

$$\vec{M}_A \cdot \vec{F}_1 =$$



On peut écrire directement les 3 équations suivantes, sans écrire tous les torseurs :

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{x} = 0 :$$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{y} = 0 :$$

$$\sum \vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0 :$$

### 4. Résolution graphique

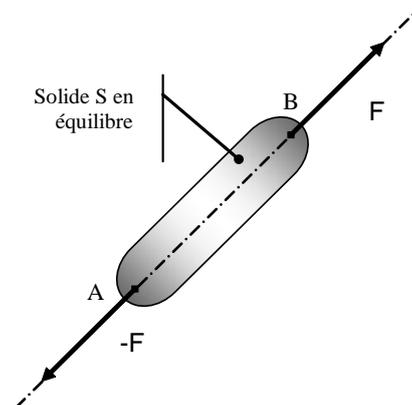
#### 4.1. Solide soumis à 2 forces :

L'application du PFS à un système matériel soumis à 2 glisseurs (forces) permet de dire que :

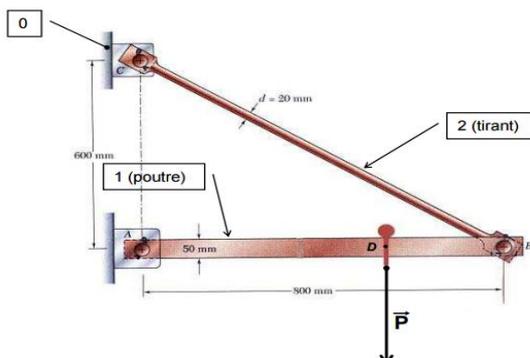
Un système matériel est en équilibre sous l'action de deux forces si **ces deux forces sont égales** en intensité **et directement opposées** (même direction et sens contraire).

Si un solide est en équilibre sous l'action de 2 forces en A et B, ces 2 forces ont :

- ☞ la même ligne d'action (droite AB),
- ☞ la même intensité,
- ☞ un sens opposé.



Ceci permet, connaissant les 2 points d'application des 2 actions mécaniques de type glisseur, d'en déduire la direction de ces actions mécaniques.



#### Exemple :

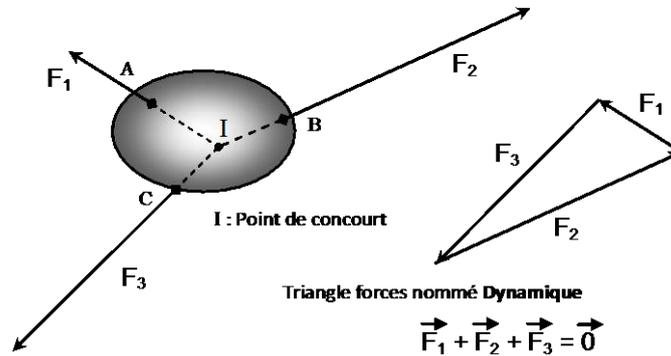
Le tirant 2 est soumis à 2 AM glisseurs en B et en C.

La direction de l'AM  $\vec{B}_{(1 \rightarrow 2)}$  est donc la droite BC.

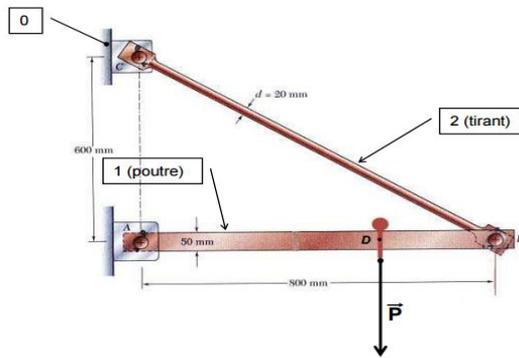
42. Solide soumis à 3 forces :

L'application du PFS à un système matériel soumis à 3 forces permet de dire que :

Un système matériel soumis à l'action de trois forces coplanaires (non parallèles) est en équilibre si **les trois forces sont concourantes au même point** et si **la somme vectorielle de ces trois forces est nulle**.



Application :



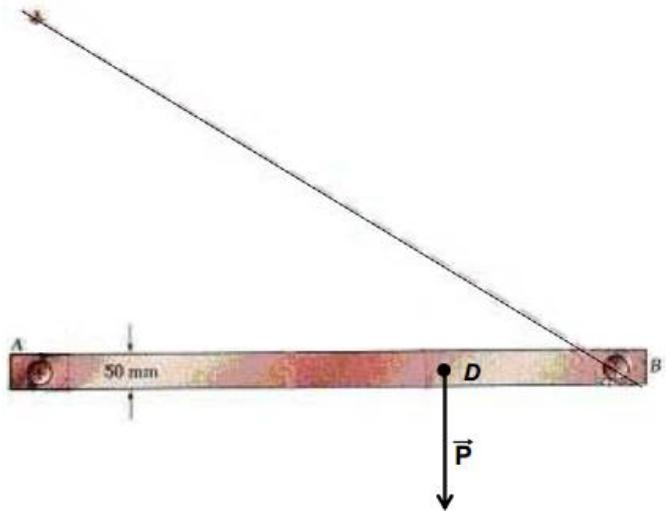
Exemple :

La poutre 1 est soumise à 3 AM glisseurs :

AM poids,  $\vec{P}$ , en D, connu,

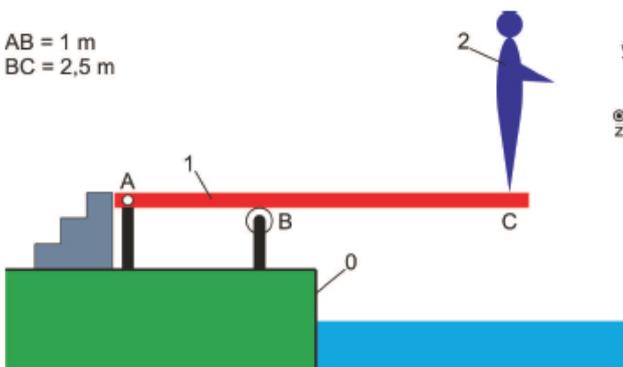
AM  $\vec{B}_{(2 \rightarrow 1)}$  en B, de direction connue BC (déterminé précédemment)

AM  $\vec{A}_{(0 \rightarrow 1)}$ , totalement inconnue...



Cas particulier d'un solide soumis à 3 glisseurs parallèles :

AB = 1 m  
BC = 2,5 m

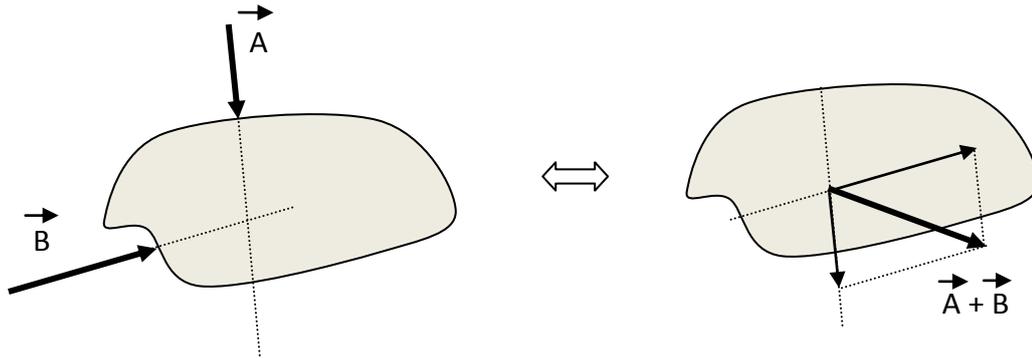


On écrit alors de manière rapide l'équation des moments, éventuellement en plusieurs points :

Le plongeur est soumis à 3 glisseurs en A, B et C. Les glisseurs en B et C étant de direction y, le glisseur en A sera aussi de direction y. Le poids du plongeur est connu.

43. Réduction de 2 glisseurs connus en un glisseur :

Deux forces connues  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  peuvent être remplacées par leur résultante  $\vec{A} + \vec{B}$  appliquée au point de concours.



44. Solide soumis à 4 forces :

Exemple d'un monte charge :



L'isolement d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 4 glisseurs, avec un glisseur complètement connu (norme, sens et support connus) et 3 autres glisseurs de support connus, permet de déterminer complètement les 3 glisseurs par *la méthode de Culmann*.

*Hyp :*

- étude plane,
- monte charge indéformable et immobile.

Déterminer la valeur de l'action du câble qui permet de maintenir le monte charge en position (1cm = 300 N).



# 4. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES AVEC FROTTEMENT

## Objectifs :

- modéliser l'action mécanique qu'exerce un solide sur un autre solide lors d'un *contact avec frottement*,
- traiter un problème avec *arc-boutement*.

### 1. Mise en évidence des frottements. Coefficient de frottement

On considère un solide (1) en appui plan avec un solide (2).

On applique progressivement sur (1) un effort extérieur  $\vec{F}$ .

Si  $\vec{F}$  faible, le solide (1) est en équilibre sous l'action de  $\vec{F}_{ext}$ ,  $\vec{P}$  (poids de (1)) et  $\vec{F}_{2/1}$  (réaction de (2) sur (1)). (fig.1)

Posons  $\vec{F}_{2/1} = N_{2/1}\vec{y} - T_{2/1}\vec{x}$ .

$N_{2/1}$  s'appelle la composante normale,  
 $T_{2/1}$  s'appelle la composante tangentielle.

Le PFS appliqué à (1) donne :  $N_{2/1} = P$  et  $T_{2/1} = F$

Si  $\vec{F}$  augmente, le solide (1) reste en équilibre, et  $\vec{F}_{2/1}$  s'incline davantage pour assurer l'équilibre. (fig.2)

On a toujours :  $N_{2/1} = P$  et  $T_{2/1} = F$

Si  $\vec{F}$  dépasse une certaine limite, le solide (1) n'est plus en équilibre, et  $\vec{F}_{2/1}$  a atteint son inclinaison limite. (fig.3 et 4)

Posons :

$\tan \alpha_{lim\ adh} = f_{adh}$  : coef adhérence

$\tan \varphi = f$  : coef de frottement

En pratique, les 2 coefficients sont très proches, et on ne considèrera que le coefficient de frottement :

$f = \tan \varphi$

Le coefficient de frottement  $f$  dépend essentiellement des matériaux en contact, des états de surface, des conditions de fonctionnement ( graissé, lubrifié, contact sec...).

Nature des matériaux	Etat de surface	$f_a = \tan \varphi_a$	$f = \tan \varphi$
Acier sur acier	A sec	0,2	0,15
	Lubrifié	0,12	0,09
Acier sur bronze	A sec	0,11	0,1
	Lubrifié	0,1	0,09
Acier ou fonte sur garniture de friction	A sec	0,45	0,4
Pneu sur chaussée	A sec	0,8	0,6

(1) en équilibre :

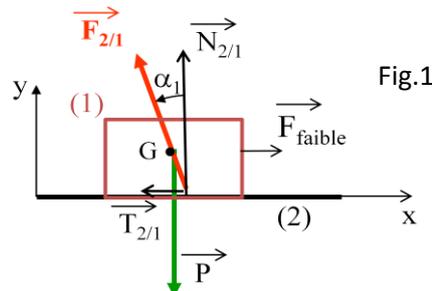


Fig.1

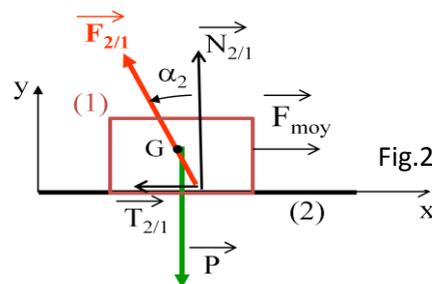


Fig.2

Limite rupture d'équilibre :

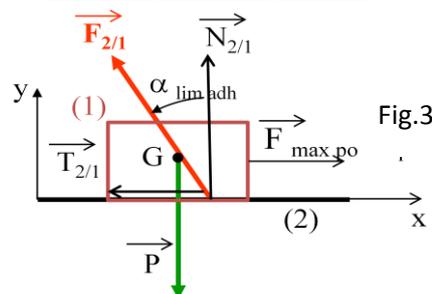


Fig.3

Non équilibre :

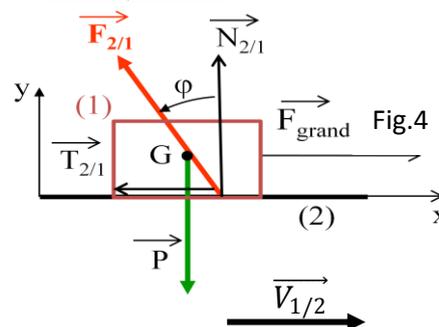
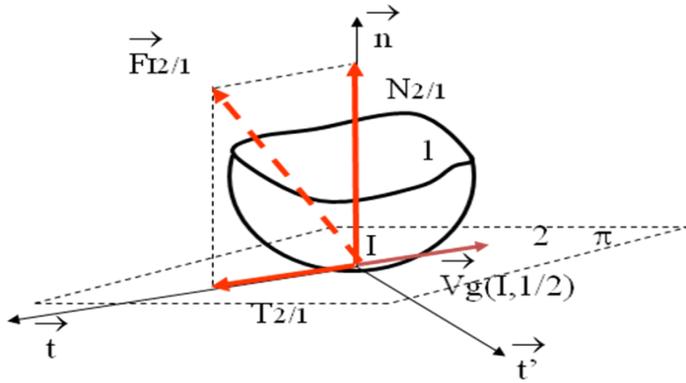


Fig.4

## 2. Lois de Coulomb

1<sup>ère</sup> loi :



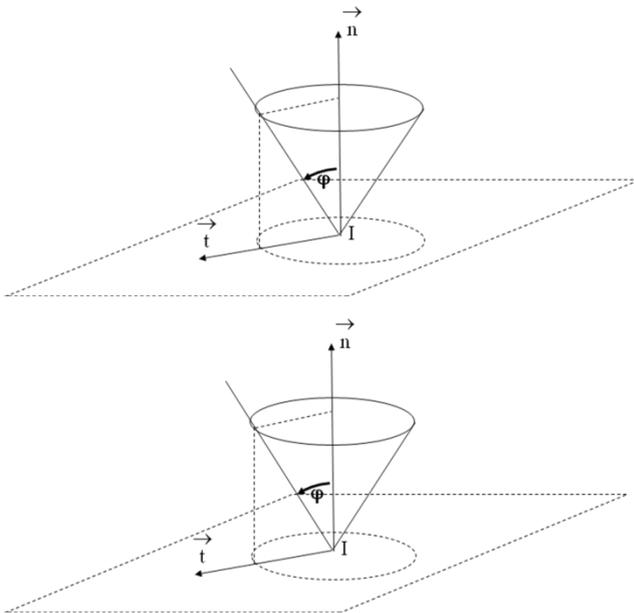
Les frottements s'opposent au glissement.

$$\text{Si } \overrightarrow{V_{g(I,1/2)}} \neq \vec{0} : \overrightarrow{T_{2/1}} \cdot \overrightarrow{V_{g(I,1/2)}} < 0$$

$$\text{Si } \overrightarrow{V_{g(I,1/2)}} = \vec{0} : \overrightarrow{T_{2/1}} \text{ s'oppose au mouvement que voudrait prendre 1 par rapport à 2.}$$

2<sup>ème</sup> loi : relation entre composantes

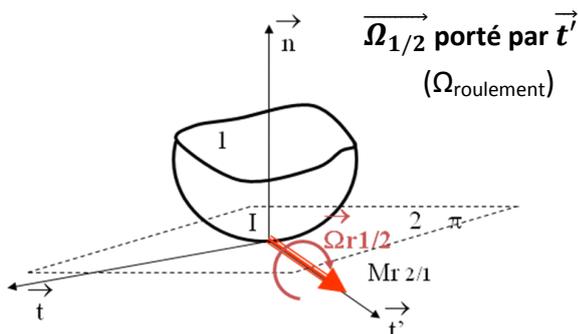
posons  $f = \tan \varphi$  le coefficient de frottement au niveau du contact



$$\text{Si } \overrightarrow{V_{g(I,1/2)}} \neq \vec{0} : \text{glissement}$$

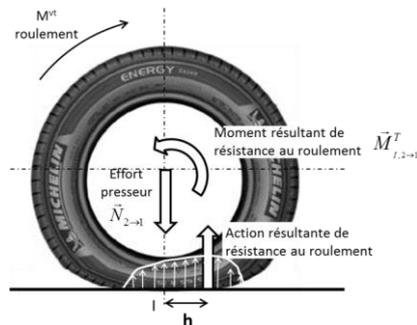
$$\text{Si } \overrightarrow{V_{g(I,1/2)}} = \vec{0} : \text{adhérence ou RSG}$$

Moment de résistance au roulement



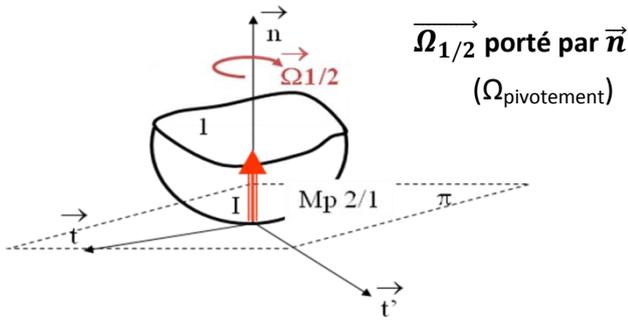
$$\text{Si } \overrightarrow{\Omega_{1/2}} \neq \vec{0} : \text{roulement}$$

$$\text{Si } \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \vec{0} : \text{non roulement}$$



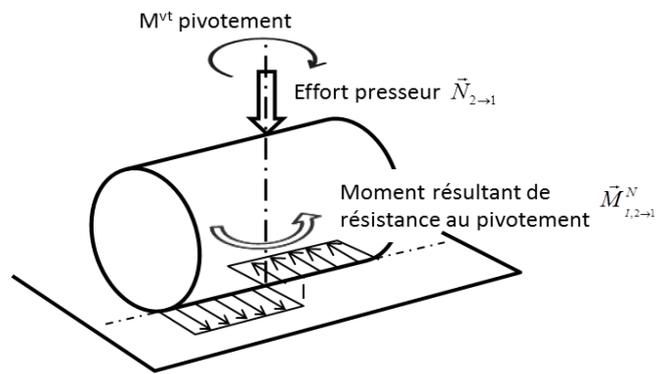
Coefficient de résistance au roulement	
Matières en contact	$\delta$
Fonte / Acier	0,0005 (m)
Acier / Acier	0,0004 (m)
Acier / béton	0,015 (m)
Roue wagon/Rail	0,0005 (m)
Caoutchouc / Bitume	0,003 à 0,015 (m)
Roue auto / Bitume	0,03 (m)

Moment de résistance au pivotement



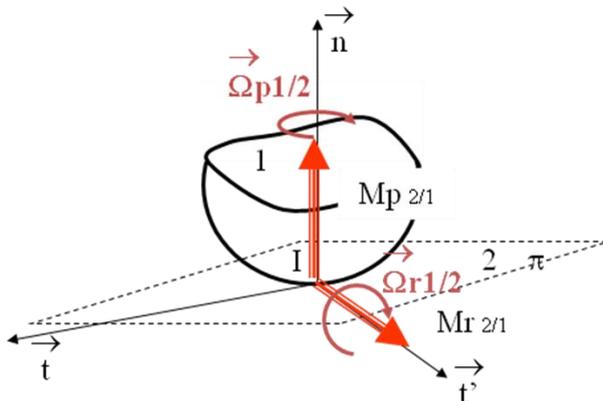
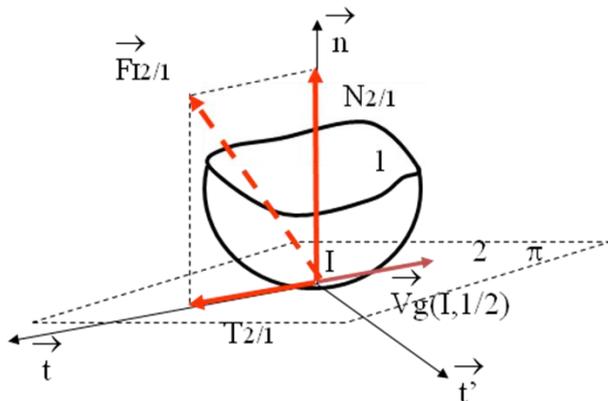
Si  $\vec{\Omega}_{1/2} \neq \vec{0}$  : pivotement

Si  $\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{0}$  : non pivotement



**3. Modélisation d'un contact ponctuel avec frottements**

Cas du contact ponctuel :



Avec :

$N_{2/1}$  : Composante normale

$T_{2/1}$  : Composante tangentielle

$Mp_{2/1}$  : Moment de résistance au pivotement

$Mr_{2/1}$  : Moment de résistance au roulement

Considérons un contact ponctuel entre (1) et (2).

Soit  $\pi$  le plan tangent commun,  $n$  sa normale,  $t$  et  $t'$  deux directions perpendiculaires du plan .

On choisit la direction  $t$  confondue avec la vitesse de glissement  $Vg(1,1/2)$ .

Frottements négligés :

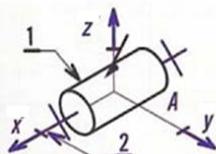
$$\left\{ \tau_{2/1} \right\}_I \begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} (n, t, t')$$

Frottements non négligés :

$$\left\{ \tau_{2/1} \right\}_I \begin{Bmatrix} N_{2/1} & Mp_{2/1} \\ T_{2/1} & 0 \\ 0 & Mr_{2/1} \end{Bmatrix} (\vec{n}, \vec{t}, \vec{t}')$$

Cas d'une liaison pivot d'axe (A,x):

$$\left\{ T_{S1 \rightarrow S2}^{sans\ frott.} \right\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(i,j,k)}$$

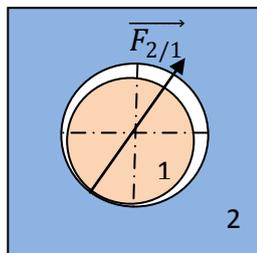


devient en considérant le frottement

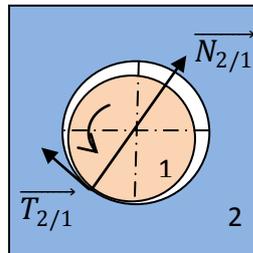
$$\left\{ T_{S1 \rightarrow S2}^{avec\ frott.} \right\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(i,j,k)}$$

où  $L_{12}$  est défini par les lois de Coulomb ou par un frottement visqueux (de valeur dépendant de la vitesse de rotation).

Dans le plan, on peut aussi modéliser une liaison pivot par un glisseur passant par le centre théorique de la liaison :



Frottements négligés



Frottements non négligés

Les lois de Coulomb s'appliquent entre N et T.

**4. Notion d'arc-boutement**

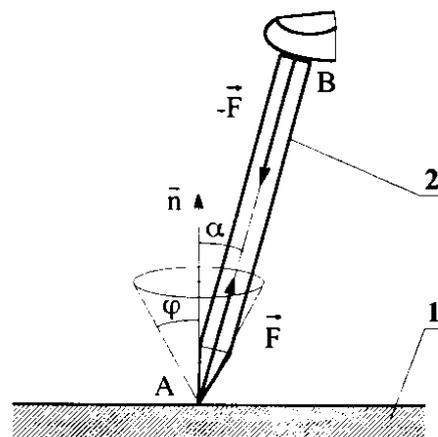
Deux solides en contact avec *frottement* sont dits en *arc-boutement* sous l'effet d'actions mécaniques extérieures, si les deux solides restent immobiles l'un par rapport à l'autre quelle que soit l'intensité de ces actions mécaniques.

Exemple :

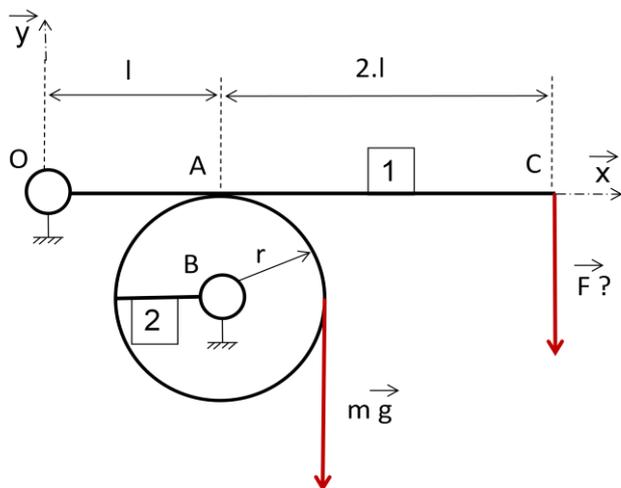
Si l'inclinaison  $\alpha$  de l'axe du crayon reste inférieure à l'angle de frottement  $\varphi$  entre la mine et la table, alors la mine du crayon ne glisse pas sur la table, et ceci quelle que soit l'intensité de la force  $\vec{F}$  exercée par le doigt.

Le phénomène d'arc-boutement est très utilisé. De nombreux dispositifs sont basés et fonctionnent grâce aux propriétés de l'arc-boutement (serre-joint, palan...).

Par contre, sur certain mécanisme on cherche à l'éviter, notamment au niveau des guidages en translation (vérins, machines avec coulisseaux, tiroirs...).



**Application : frein de poulie**



Une poulie supporte une charge  $m$  connue. Pour la freiner, on exerce un effort  $\vec{F}$  à déterminer en bout de levier 1. Le contact ponctuel en A se fait avec frottement.

Données :

Masse  $m = 800$  kg ;  $l = 0,2$  m ;  $r = 0,15$  m.

Coefficient de frottement en A :  $f = 0,4$

Question :

Déterminer l'effort  $\vec{F}$ , ainsi que l'action de la liaison pivot en O de 0 sur 1.

# 5. MODELISATION DES CONTACTS SURFACIQUES

## Objectifs :

- Connaître l'action mécanique résultant de la pression d'un fluide.
- Connaître le comportement local d'un contact entre 2 solides (pour vérifier s'il n'y a pas détérioration locale) entre ces solides.
- Calculer les actions transmissibles par les frottements au niveau d'un contact surfacique (couple transmissible par un embrayage, couple de freinage...).

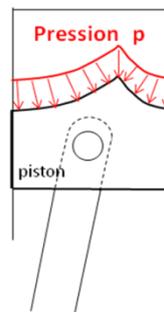
## 1. Modèle global – modèle local

Lors d'un contact entre 2 solides ou un fluide et un solide, il s'installe une pression de contact.

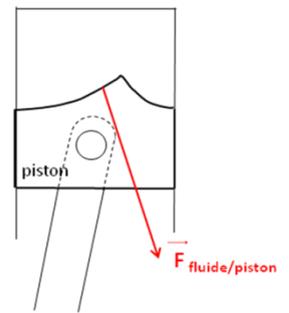
Le **modèle local** prend en compte les petits efforts locaux dus à cette pression de contact, qui peut être différente selon les points de contact.

Le **modèle global** prend en compte l'effort résultant de tous ces petits efforts. Les 2 modèles doivent bien sur être équivalents d'un point de vue statique.

Modèle local



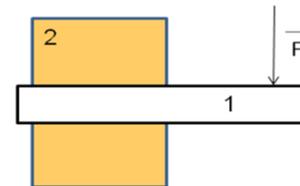
Modèle global



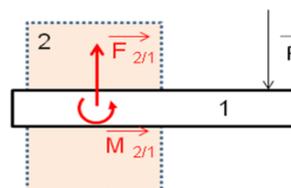
Le **modèle global** considère les solides indéformables, et les contacts parfaits en un point ou une ligne.

Le **modèle local** va considérer des contacts surfaciques, en prenant en compte les petites déformations locales des solides.

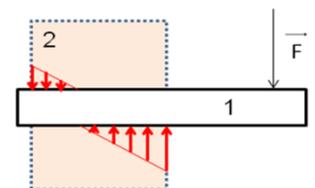
Exemple de modélisations de l'assemblage entre 2 et 1 :



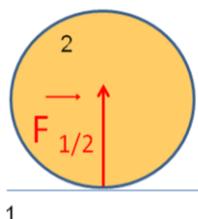
Modèle global



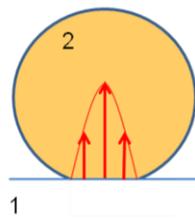
Modèle local



modèle global



modèle local



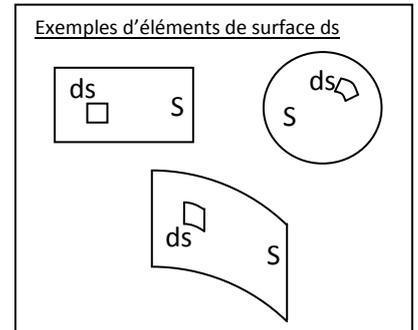
## 2. Méthodologie.

- Soit S une surface de contact: - entre 2 solides 1 et 2  
- entre un fluide sous pression et un solide 1

On souhaite modéliser l'action mécanique au niveau du contact S entre 2 et 1, ou du fluide sur 1.  
On appelle p(M) la pression de contact en M entre 2 et 1 (ou la pression du fluide sur 1).

Démarche :

1. Paramétrage de la position d'un point M de la surface de contact S  
*Coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques*
2. Définition d'une surface élémentaire dS autour de ce point, telle que la juxtaposition des dS reconstitue la surface totale S.  
*Rectangle élémentaire, secteur angulaire élémentaire...*
3. Définition d'une loi de répartition de la pression en fonction de la position de M.  
*Pression uniforme, ou variant linéairement ou sinusoidalement en fonction de la position de M.*
4. Définition de l'effort élémentaire (effort du fluide ou de l'autre solide sur l'élément de surface défini)



$$\vec{df} = p(M). ds. \vec{n} \quad \text{ou} \quad \vec{df} = p(M). ds. \vec{n} + f. p(M). ds. \vec{t} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \vec{n} : \text{normale au contact en M.} \\ \vec{t} : \text{tangent au contact en M.} \end{array}$$

5. Calcul de la résultante de tous les efforts élémentaires

$$\vec{F}_{2/1} = \iint_{(S)} \vec{df}$$

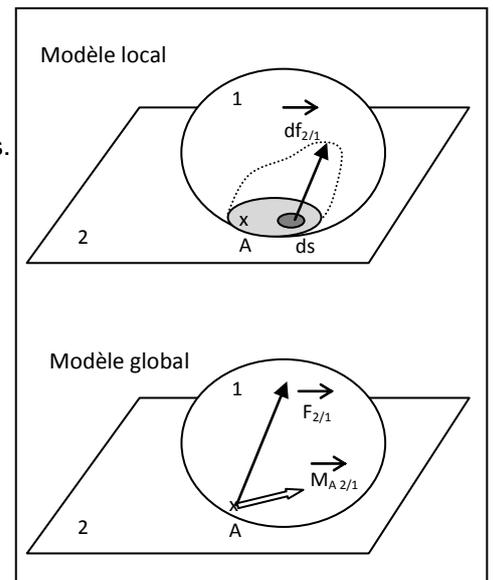
6. Calcul du moment résultant en un point de tous les efforts élémentaires.

$$\vec{M}_{A \ 2/1} = \iint ( \vec{AM} \wedge \vec{df} )$$

7. D'où le torseur de l'action mécanique de 2 (ou fluide) sur 1.

$$\left\{ T_{2/1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2/1} = \iint_{(S)} \vec{df} \\ \vec{M}_{A \ 2/1} = \iint ( \vec{AM} \wedge \vec{df} ) \end{array} \right.$$

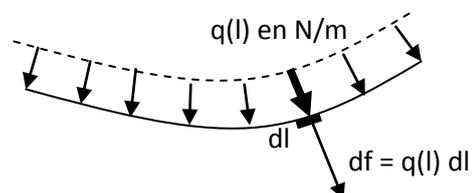
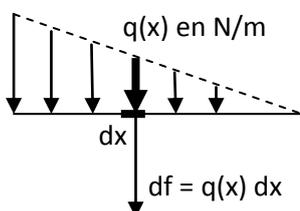
8. On applique le PFS au solide isolé 1.



## 3. Cas particulier de problèmes plan

Lorsque le problème est plan, pour simplifier les calculs, on peut considérer un élément de longueur plutôt qu'un élément de surface, et une charge linéique (en N/m) plutôt qu'une pression de contact (charge surfacique).

Exemples :



# 6. MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES DE PESANTEUR

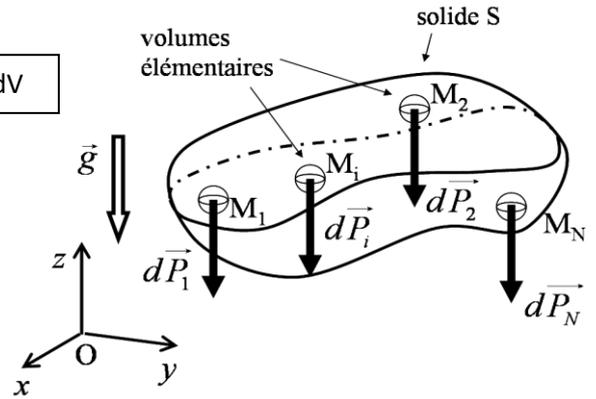
Un système matériel de masse  $M$  peut être défini comme la juxtaposition de particules de matière (points matériels) de masse  $dm$  et de volume  $dV$ , ayant une masse volumique  $\rho(M)$  :

Le torseur de la pesanteur sur  $S$  s'écrit :

$$\{T_{\text{Pesanteur} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \rho_i dV_i \cdot \vec{g} \\ \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \rho_i dV_i \cdot \vec{g} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in V} \rho(M) \cdot \vec{g} \cdot dV(M) \\ \int_{M \in V} \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M) \cdot \vec{g} \cdot dV(M) \end{array} \right\}$$

$$dm = \rho(M) \cdot dV$$



La résultante est le poids:  $\vec{P} = \int dm \cdot \vec{g} = \int \rho(M) dV \cdot \vec{g}$

Si le solide est homogène, alors son poids vaut :

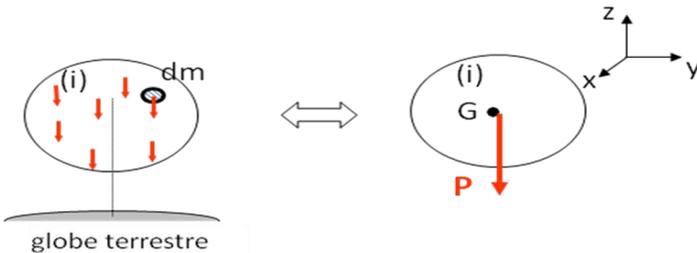
$$\vec{P} = \rho \int dV \cdot \vec{g} = \rho \cdot V \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{g}$$

Définition du centre de gravité :

$G$ , centre de gravité du solide  $S$ , est le point tel que :  $\forall A, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{M \in V} \overrightarrow{AM} \cdot dm$

Rq : La détermination du centre de gravité est devenue aisée avec les logiciels de modélisation 3D.

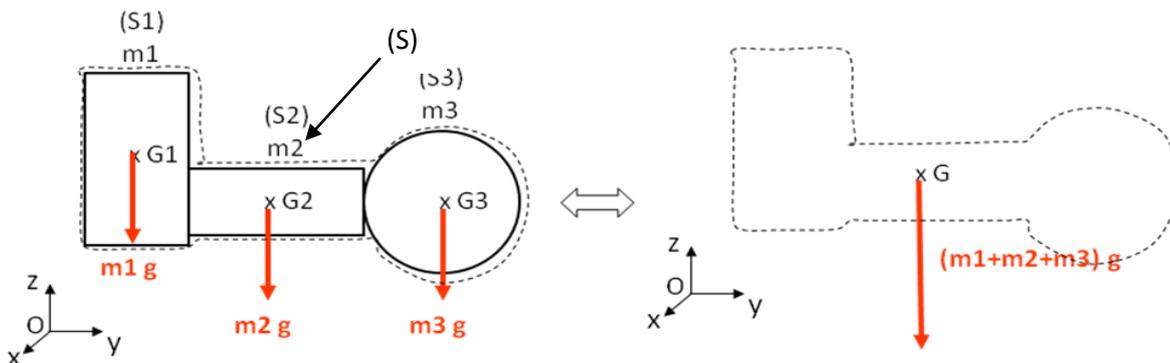
On peut alors modéliser l'action de la pesanteur par une force appliquée en son centre de gravité (glisseur) :



$$\{T_{\text{pes}/(i)}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M \cdot g & 0 \end{pmatrix}_R$$

Cas particulier de décomposition d'un solide en solides élémentaires :

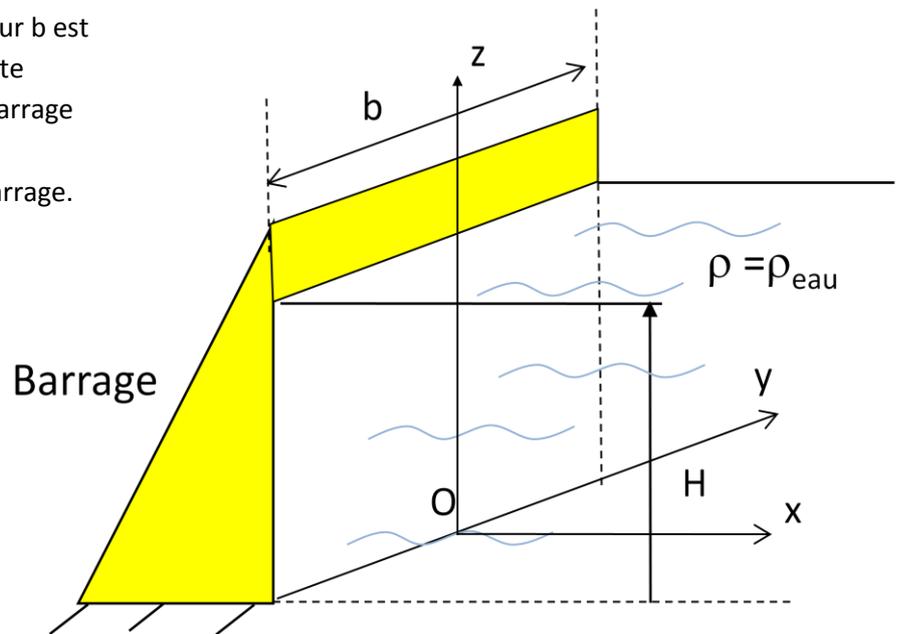
Soit un solide  $(S)$  qui peut être décomposé en 3 solides  $(S1)$ ,  $(S2)$ , et  $(S3)$ , de formes simples, de centres de gravité connus :



$$\text{On a alors : } (m1 + m2 + m3) \cdot \overrightarrow{OG} = m1 \cdot \overrightarrow{OG1} + m2 \cdot \overrightarrow{OG2} + m3 \cdot \overrightarrow{OG3}$$

Cela permet de modéliser l'action mécanique du poids d'un solide de forme complexe par superposition des poids des volumes élémentaires simples qui le constituent, leurs centres de gravités étant eux connus.

Une hauteur d'eau  $H$  sur une largeur  $b$  est retenue par un barrage. On souhaite modéliser l'action de l'eau sur le barrage en vue d'y appliquer le PFS pour déterminer l'action du sol sur le barrage.



1. Paramétrage point  $M$

2. Définition  $dS$

3. Loi de répartition de la pression en fonction de la position de  $M$ .

4. Effort élémentaire eau/barrage :

5. Résultante action eau/barrage

6. Moment résultant en  $O$  de l'action eau/barrage.