Modéliser et vérifier les performances cinématiques et statiques des *chaînes de solides*

Chaînes de solides et hyperstatisme

1. Introduction

Afin de prévoir les performances d'un système, il est nécessaire de définir plusieurs grandeurs caractéristiques qui lui sont propres; par exemple, on a analysé la loi entrée sortie géométrique/cinématique (obtenue par fermeture géométrique/cinématique) ainsi que les conditions d'équilibre du mécanisme (modélisation des actions mécaniques et Principe Fondamental de la Statique). Ces méthodes d'analyse mettent toutes deux en place des systèmes d'équations pour lesquels il faut se poser la question concernant l'existence d'une solution unique avant de tenter leur écriture et leur résolution.
Dans ce qui suit, nous allons répondre à cette question en effectuant une analyse ***des chaînes de solides***. Pour cela, on va définir la notion de ***mobilités*** d'un système et de ***degré d'hyperstatisme***. Cette étude va permettre de justifier le choix des liaisons, ou bien encore d'effectuer un nouveau choix de modélisation des liaisons dans un projet de mécanisme.

Il s'agira donc de se demander

- Combien de paramètres doit-on s'imposer afin que toute la cinématique soit déterminée (position géométrique connue) ? =>m_C : Mobilité cinématique
- Quelles sont les lois entrées-sorties du mécanisme (en terme de vitesse ou d'effort)?
- Connaissant les efforts extérieurs, est-on capable de déterminer toutes les actions mécaniques de liaison?
  OUI : la modélisation du mécanisme est dite « isostatique »
  NON : la modélisation du mécanisme est dite « hyperstatique » de degré h égal au nombre d'inconnues d'effort indéterminables.
- Quelles sont les conséquences d'une modélisation hyperstatique sur la géométrie ? Comment modifier une modélisation de mécanisme afin de la rendre isostatique ?

Tout ceci aura une incidence directe sur la conception des guidages dans les mécanismes ainsi que dans leur cotation et fabrication.

Hypothèses *: Dans tout cette séquence, nous considérerons que :*

- *Les pièces sont indéformables,*
- *Les effets dynamiques sur l'ensemble des pièces sont négligés, de telle sorte que le principe fondamental de la statique puisse s'appliquer.*

2. Rappel sur les chaînes de solides

2.1 Notations

- Torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison $\mathcal{L}_{ij}$ du solide S_i sur le solide S_j écrit au point M, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\left\{T_{(S_i \to S_j)}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix}\right\}_{M(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Les coordonnées non nulles de torseur sont les inconnues statiques, et sont au nombre de n_S.

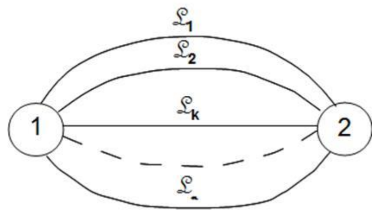
- Torseur cinématique de S_i par rapport à S_j écrit au point M, aussi appelé torseur cinématique associé à la liaison $\mathcal{L}_{ij}$ entre les solides S_i et S_j écrit au point M, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\left\{V\left(S_i / S_j\right)\right\} = \left\{\begin{matrix} \omega x_{ij} & Vx_{ij} \\ \omega y_{ij} & Vy_{ij} \\ \omega z_{ij} & Vz_{ij} \end{matrix}\right\}_{M(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Les coordonnées non nulles de ce torseur sont les inconnues cinématiques, et sont au nombre de n_c.
Pour une **liaison parfaite**, on vérifie $\boldsymbol{n_S + n_c = 6}$

2.2 Liaisons en parallèle – définition de la liaison équivalente

Approche cinématique:

Le torseur cinématique de la liaison équivalente $\{V_{équ}\}$ doit être compatible avec tous les torseurs cinématiques des laisons $\mathcal{L}_i$, $i=1..n$, entre les pièces 1 et 2, ce qui signifie :



$$\forall i = 1..n, \left\{V_{equ}\,(1/2)\right\} = \left\{V_{L_i}\,(1/2)\right\}$$

Approche statique:

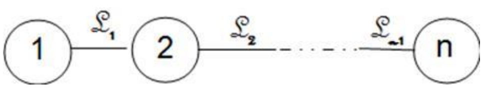
Le torseur d'action mécanique transmissible par la liaison équivalente entre 1 et 2, noté $\left\{T_{equ}\,(1 \to 2)\right\}$, est obtenu par :

$$\left\{T_{equ}\,(1 \to 2)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{T_{L_i}\,(1 \to 2)\right\}$$

Remarque : Cette relation se déduit de l'isolement de (2).

2.3 Liaisons en série ou chaîne ouverte – définition de la liaison équivalente

Approche cinématique:



Par écriture de la relation de composition des torseurs cinématiques, on obtient pour le torseur cinématique équivalent de la liaison $\mathcal{L}_{0n}$ entre les solides S_o et S_n écrit au point M :

$$\left\{V_{equ}\right\} = \sum_{j=2}^{n} \left\{V\left(S_j / S_{j-1}\right)\right\} = \left\{V\left(S_n / S_1\right)\right\}$$

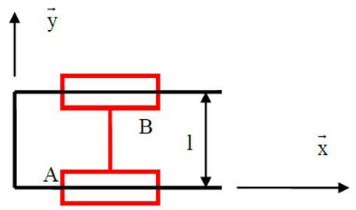
Approche statique:

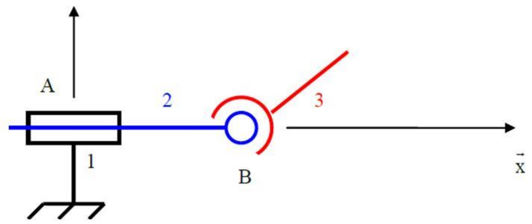
Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente $\left\{T_{equ}\left(1 \to n\right)\right\}$ doit être compatible avec tous les torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons $\mathcal{L}_i$, i=1..n, entre les pièces 1 et n, ce qui signifie :

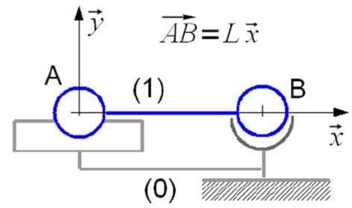
$$\boxed{\forall i = 1..n-1, \left\{T_{equ}\left(1 \to n\right)\right\} = \left\{T_{L_i}\left(i \to i+1\right)\right\}}$$

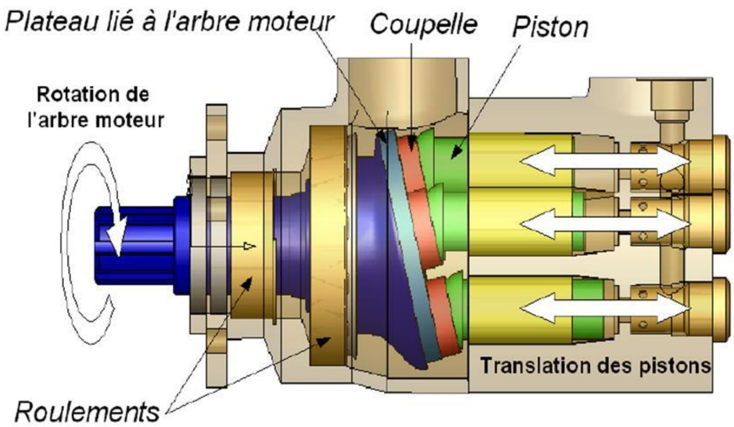
Exemple classique de système en chaîne ouverte: bras de robot Ericc 3

2.4 Exemples élémentaires à connaître

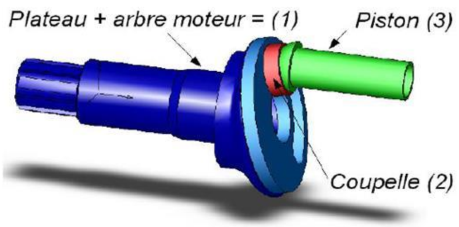


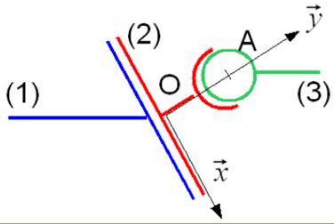






Pompe à pistons axiaux

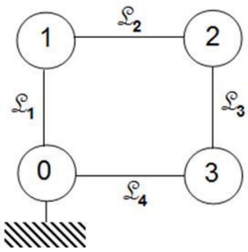




2.5 Conclusion – méthode de définition d'une liaison équivalente

Afin de simplifier la quantité de calculs à mettre en place, on choisira la méthode statique dans le cas de liaisons en parallèles et cinématique dans le cas de liaisons en série.

2.6 Liaisons en chaîne fermée simple

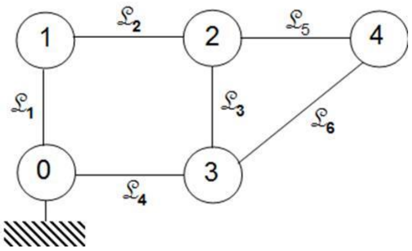


Une chaîne est dite ***fermée*** lorsque son graphe de structure présente une boucle.

On dit de cette chaîne qu'elle est ***simple*** car elle ne présente qu'une seule et unique boucle.

Exemple: système Maxpid

2.7 Liaisons en chaîne fermée complexe



Une chaîne est dite *complexe* lorsqu'elle présente plusieurs chaînes simples imbriquées.
On montre que le nombre de *cycles indépendants* d'une chaîne fermée complexe est donné par son *nombre cyclomatique* :

$$\boxed{\gamma = l - N + 1}$$

Avec l le nombre de liaisons de la chaîne complexe, et N le nombre de solides de la chaîne

3. Degré de mobilité d'un mécanisme et hyperstatisme

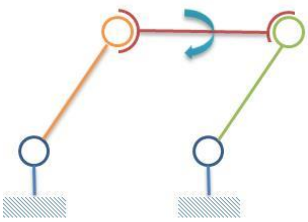
3.1 Degré de mobilité d'un mécanisme

Définition

Le degré de mobilité *m* caractérise le nombre de *mouvements indépendants* d'un mécanisme.

Celui-ci se décompose en la somme de deux termes, $m=m_u + m_i$ de significations différentes :

mobilité utile m_u *: c'est en général la ou les mobilités souhaitées du système (loi entrée/sortie)*
mobilité interne m_i *: c'est une mobilité qui caractérise le mouvement d'une pièce du mécanisme indépendamment des mouvements des autres pièces. Ce mouvement est indépendant de la loi entrée sortie. Souvent, ces mobilités internes sont dues à des rotations de pièces sur elle mêmes.*



Remarque : m=0 signifie que le système est immobile.

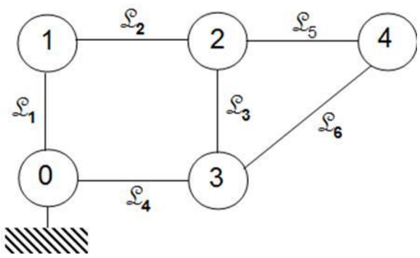
L'analyse des mobilités interne et utile se fera donc tout naturellement à partir d'une étude cinématique de la chaîne complexe de solides.

Calcul de la mobilité

Le degré de mobilité d'un mécanisme correspond au nombre d'inconnues cinématiques que l'on ne peut pas déterminer avec la ou les fermetures cinématiques.

Analytiquement, cela revient à effectuer la démarche suivante :
Soit un mécanisme formé de N solides reliés par l liaisons. Le nombre de cycles indépendants du mécanisme est $\gamma = l - N + 1$
Pour chaque liaison élémentaire, on peut écrire le torseur cinématique. Chaque torseur comporte n_{ci} inconnues cinématiques indépendantes (1 pour une pivot, 2 pour une pivot glissant, 5 pour une ponctuelle…).
Pour chaque cycle indépendant, en écrivant la fermeture cinématique, on obtient 6 équations. Donc pour toutes les boucles indépendantes, on obtient $E_C = 6\gamma$ équations.

Le nombre total d'inconnues cinématiques est $I_C = \sum_{i=1}^{L} n_{ci}$.



Le système obtenu est un système de E_c équations avec I_c inconnues. Le rang de ce système est noté r_c.

Le degré de mobilité est donc $\boxed{m = I_c - r_c}$

si m=0, le mécanisme est immobile,
si m>0, le système est mobile de mobilité m.

3.2 Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Définition

Le degré d'hyperstaticité h d'une modélisation de mécanisme se définit par le nombre d'inconnues d'action mécanique de liaison non calculables par le PFS et caractérise donc la surabondance des liaisons constituants le modèle du système.

Un modèle de système est dit isostatique si h=0. Dans ce cas il est possible de déterminer la totalité des inconnues de liaison en appliquant à chaque pièce le PFS.

Remarque : *chaque inconnue de liaison non déterminable par le PFS est un degré d'hyperstaticité (h>0).*

Une analyse de l'équilibre statique d'un mécanisme permettra de déterminer ce degré.

Calcul du degré d'hyperstaticité

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme correspond au nombre d'inconnues statiques que l'on ne peut pas déterminer en appliquant le PFS à chaque solide.

Analytiquement, cela revient à étudier :

- le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles $I_S = \sum_{i=1}^{l} n_{si}$ où l est le nombre de liaisons du système et n_{Si} le nombre d'inconnues associé à une liaison,
- le nombre d'équations indépendantes obtenues en appliquant le PFS à chaque solide (sauf le bâti), soit le **rang** r_S associé au système linéaire constitué de $E_S = 6(N-1) = 6n$ équations, avec N le nombre de solides du système et n. le nombre de solides sans le bâti.

L'hyperstatisme est donc défini par : $\boxed{h = I_S - r_S}$

On appliquera cette méthode sur un exemple très simple car cette méthode est relativement lourde en terme de calcul et aussi fastidieuse en terme d'analyse.

3.3 Relation entre degré d'hyperstatisme et degré de mobilité

En étudiant les équations qui traduisent l'équilibre d'un système et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on trouve une dualité entre les études statique et cinématique d'un mécanisme.

Cette dualité nous permet d'écrire : $m = E_S - r_S$

Or $h = I_s - r_s$ donc $m - h = E_s - I_s$

Finalement on a la relation : $\boxed{h = I_s + m - 6n}$

On peut obtenir une relation avec I_c sachant que : $I_s = \sum_{i=1}^{l} n_{si} = \sum_{i=1}^{l}(6 - n_{ci}) = 6l - I_c$

D'où : $h = 6l - I_c - 6n + m = 6(l-n) + m - I_c$

Finalement on a la relation : $\boxed{h = 6\gamma + m - I_c}$

Ces relations permettent de déterminer rapidement le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme après avoir déterminé son degré de mobilité.

Pour information, dans le cas d'un problème plan, on a:

$$\boxed{h = 3\gamma + m - I_C \text{ et } h = I_S + m - 3n}$$

3.4 Bilan

Le tableau ci-dessous résume les résultats énoncés pour les chaînes simples fermées constituées de *n+1* solides dont le bâti.

Bilan	Cinématique	Statique
Inconnues	$I_c = \sum_{i=1}^{l} n_{c_i}$	$I_s = \sum_{i=1}^{l} n_{si} = 6l - I_c$
Équations	$E_c = 6\gamma$	$E_s = 6n$
Équations indépendantes	r_c	r_s
Mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_S - r_S$
Hyperstatisme	$h = 6\gamma + m - I_c$	$h = I_s - r_s$ $h = I_s + m - 6n$

__Remarque :__ Pour les mécanismes plans, ce bilan est encore valable si on remplace dans toutes les expressions 6 par 3.

3.5 Méthode « intuitive » de définition du degré de mobilité.

Cette méthode repose sur l'analyse fine du schéma cinématique (compréhension des liaisons mises en place, visualisation de la loi entrée sortie et visualisation de toutes les mobilités permises par une liaison). Avec un peu de pratique, cette méthode est très rapide.

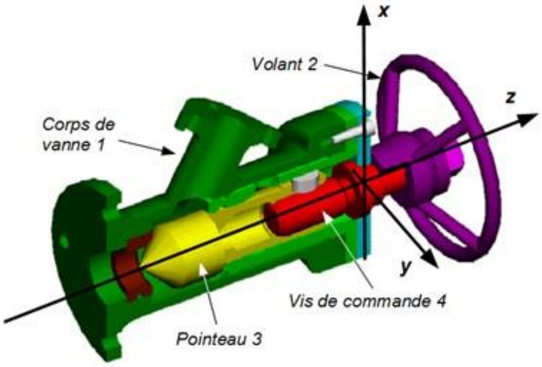
Pour cela, la démarche à mettre en place est :

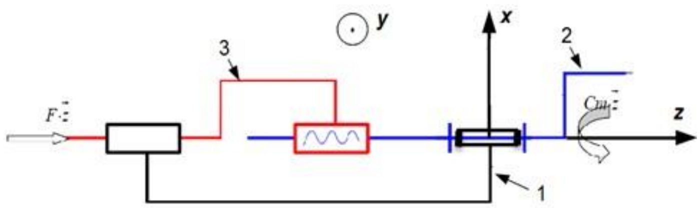
- dans un premier temps, définir la mobilité utile du système en définissant le nombre de paramètres cinématiques à imposer pour obtenir la relation entrée sortie (le nombre d'actionneurs utilisés est généralement un bon indicateur),

- dans un second temps, de définir la mobilité interne au système, en recherchant tous les mouvements (permis par les liaisons constitutives du système) qui laissent inchangés la configuration globale du système (ie les mouvements qui ne contribuent pas à la relation entrée sortie).

- d'en déduire à partir de la relation liant mobilité et hyperstaticité ce dernier degré.

3.6 Application à la vanne de robinet en annexe





On définit donc :

- la mobilité utile : il faut imposer un paramètre cinématique pour mettre en mouvement le système complet et donc mettre en évidence la loi entrée sortie (si l'on fait tourner le volant (un paramètre cinématique relatif à cette rotation), le pointeau va translater, ce qui constitue la loi entrée sortie du système).

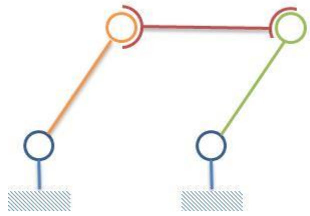
- la mobilité interne : si l'on imagine que l'on prend chaque liaison indépendamment l'une des autres, et qu'on vient actionner sur chacune d'entre elles, chaque mouvement possible par la liaison, on ne peut trouver aucun mouvement qui n'engendre aucune modification de la loi entrée sortie.
Ou, dit autrement : on bloque la ou les mobilités utiles et on regarde si des mouvements sont encore possibles.

La mobilité utile est donc de 1, la mobilité interne est donc de 0.

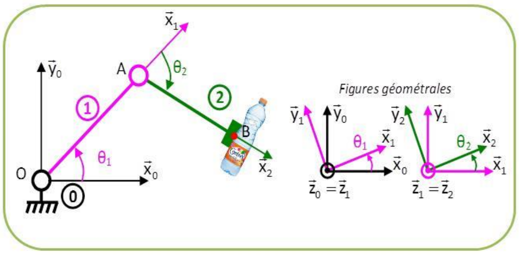
On en déduit donc que le système est hyperstatique d'ordre 4.

3.7 Applications classiques

Système en chaîne fermée type 4 barres :



Système en chaîne ouverte :



4. Interprétation d'un hyperstatisme vis à vis de la cinématique et de la géométrie

Un hyperstatisme correspond à des actions mécaniques de liaison indéterminables par le PFS.

Influence de l'hyperstatisme au montage :
La connaissance du degré d'hyperstatisme est importante dans l'étude des mécanismes. En effet, un hyperstatisme induit des **contraintes géométriques** lors du montage des différentes pièces.

- Pour cela, on admettra le résultat suivant :

Le degré d'hyperstatisme peut être interprété comme le nombre de conditions géométriques à imposer dans un mécanisme pour le rendre isostatique.
On retiendra les analogies suivantes :

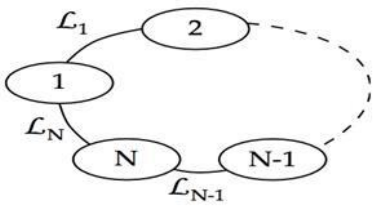
$$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \theta_x & \delta_x \\ \theta_y & \delta_y \\ \theta_z & \delta_z \end{Bmatrix}$$

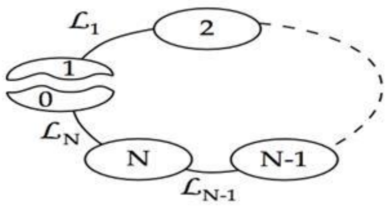
Action mécanique non calculable — *Défaut géométrique associé*

Pour déterminer les actions mécaniques non calculables une étude statique complète est nécessaire, elle peut être très longue.

- Autre méthode pour déterminer les contraintes géométriques lors du montage.

Pour faire un montage, il faut être capable de fermer la (ou les) boucle(s).





Pour illustrer ce propos sur une chaîne fermée simple, la démarche consiste à « briser » artificiellement un solide, puis à essayer de repositionner les 2 parties en face l'une de l'autre afin de réaliser la liaison encastrement. Ceci consiste à positionner le solide 2 sur le solide 1 via la liaison L_{12}, puis le solide 3 sur le solide 2 via la liaison L_{23}... et on arrive au solide 0 positionné sur le solide N via la liaison L_{N0}.
Deux cas peuvent alors se produire :

- soit le nombre de mobilité des liaisons en série vaut 6: il est alors possible de bouger comme on le souhaite le solide 0 dans l'espace, et donc de le positionner parfaitement par rapport au solide 1 (on peut « recoller » sans problème les deux morceaux même si les pièces intermédiaires ont des défauts issus des opérations de fabrication),

- soit le nombre de mobilité de la liaison en série est inférieur strictement à 6. Dans ce cas, à cause des défauts de fabrication des pièces intermédiaires et des contraintes géométriques, le solide 0 ne peut pas se retrouver dans la bonne position par rapport au solide 1.

Pour éviter les problèmes de montage dans le cas d'un modèle de système hyperstatique, technologiquement :

- soit on déforme les pièces lors du montage, ce qui a pour effet d'induire des contraintes internes au sein des pièces et d'augmenter les efforts de contact dans les liaisons (les calculs sont faits en modélisant les pièces par des solides déformables et nécessitent la connaissance des défauts de fabrication). On dit que le système est plus *rigide.*

- en prévoyant des *dispositifs de réglage*,

- en mettant en place une *cotation fonctionnelle* plus sévère,

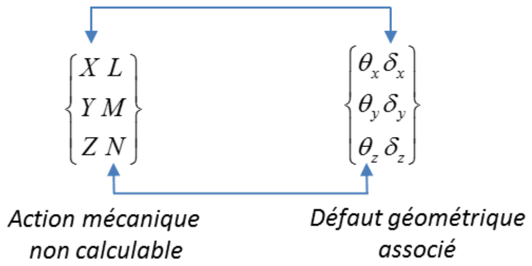
- en faisant de l'*appairage* (mesurer les pièces et monter ensemble les pièces de dimensions proches),

- en combinant les propositions précédentes.

5. Liaisons composées

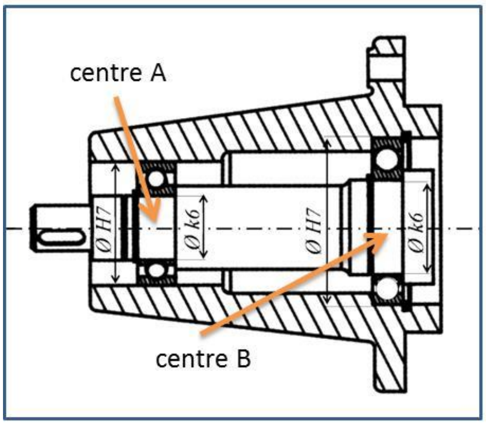
5.1 Rappel

Le degré d'hyperstatisme peut être interprété comme le nombre de conditions géométriques à imposer dans un mécanisme pour le rendre isostatique. On retiendra les analogies suivantes :

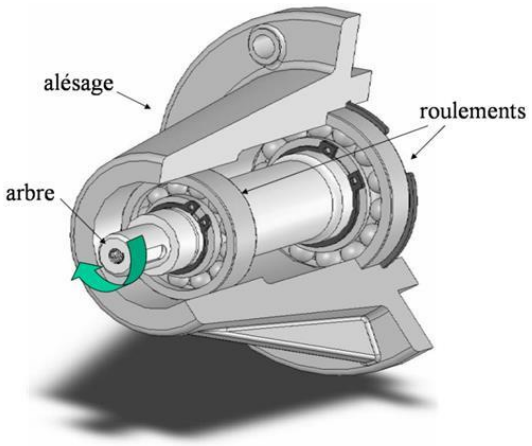


5.2 Etude de cas 1

Montage envisagé



Plan d'ensemble

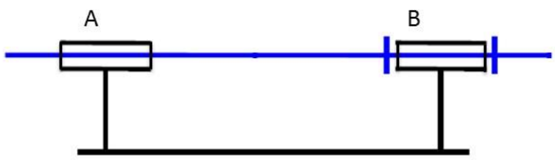


Représentation volumique

La liaison équivalente au guidage en rotation est une liaison pivot d'axe (AB). Celle-ci est réalisée par l'association classique en parallèle de deux roulements à billes à gorges profondes.

Modélisation au premier degré

Les deux roulements envisagés peuvent être modélisés au premier degré par une liaison pivot glissant pour le roulement de centre A (cf bague extérieure libre en translation) et par une liaison pivot pour le roulement de centre B.



Il en résulte alors un hyperstatisme interne à ce guidage en rotation de : $h = (4+5) - 6 \times 1 + 1 = 4$

Ce fort hyperstatisme interne peut être réduit en appliquant une modélisation plus fine des éléments roulants.

Modélisation au second degré

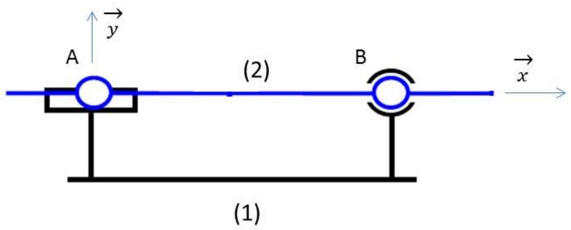
Pour mettre en place ce type de modélisation, on va alors prendre en compte *les jeux internes* aux roulements choisis.

Dans ce cas, on retiendra :

- Qu'à part le roulement rigide à deux rangées de billes et la butée à billes, tous les roulements rotulent (angle de rotulage entre 10' et 3° cf cours de première année) ;

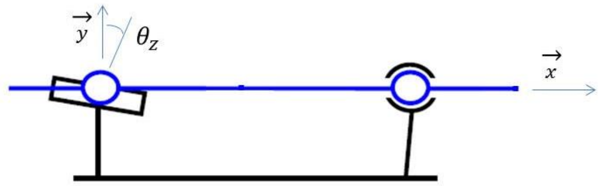
- Les roulements à rouleaux ainsi que les roulements à aiguilles rotulent peu ; de ce fait les conditions d'adoption d'un modèle à rotulage sont plus restrictives (nécessité d'avoir peu de déformation sous charge et de faibles défauts de coaxialité).

En tenant compte de ces règles élémentaires, on peut proposer la modélisation au second degré suivante :

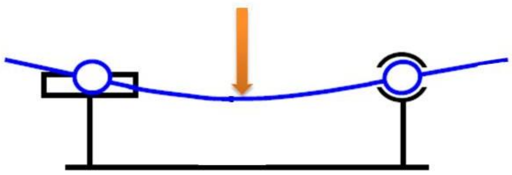


Il en résulte alors un hyperstatisme interne à ce guidage en rotation de : $\boxed{h = (2+3) - 6 \times 1 + 1 = 0}$

Cet isostatisme interne permet donc d'être insensible (dans la limite des angles de rotulage des roulements) aux défauts géométriques lors de la fabrication ou bien encore à la déformation sous charge des pièces comme le montre les deux schémas ci-dessous :



Exemple de défaut de fabrication



Exemple de déformation sous charge

On rappelle notamment que l'on est en mesure de calculer les efforts de contact dans les deux éléments roulants en vue de leur dimensionnement.

Conclusion

En conclusion, ce type de montage sera dit **non auto-contraint au montage** et il permettra des tolérances de cotation plus larges (et sera donc plus économique).

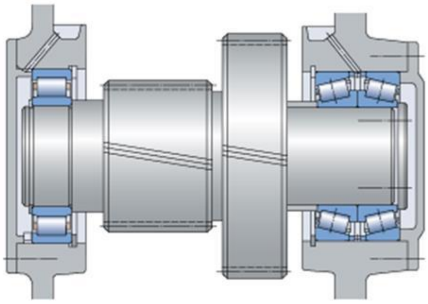
Remarque :

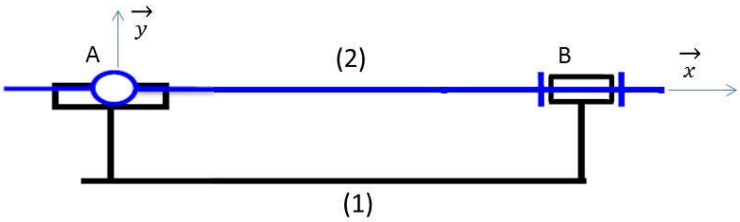
Le calcul du degré d'hyperstaticité peut s'écrire : $h = I_S - E_S + m$ ou encore $h = I_S - (E_S - m)$

Dans le cas des liaisons composés ne faisant apparaitre que deux classes d'équivalence cinématique, le terme $E_S - m$ sera égal aux nombres d'inconnues statiques de la liaison équivalente à réaliser.

Il vient donc :
$h = 2 + 3 - 5 = 0$

5.3 Etude de cas 2





Modélisation au second degré et hyperstatisme

Le montage de roulement ainsi proposé peut être modélisé au second degré par une pivot et une linéaire annulaire. On obtient donc le schéma cinématique précédent.

Contraintes géométriques associées

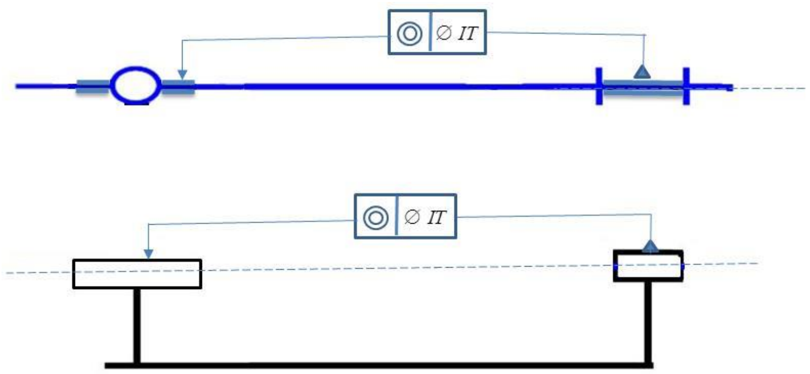
Méthode 1 de définition du degré d'hyperstatisme

Il en résulte alors un hyperstatisme interne à ce guidage en rotation de : h = 1 +6*1 – 5 = 2

En reprenant la méthode vue précédament, on définit les contraintes géométriques en prenant comme liaison de travail, par exemple, la liaison pivot.

On a : $\left\{V_{L_B}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Omega x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ et donc $\left\{V_{L_B}\right\}^* = \left\{\begin{matrix} 0 & Vx^*_{30} \\ \Omega y^*_{30} & Vy^*_{30} \\ \Omega z^*_{30} & Vz^*_{30} \end{matrix}\right\}_{B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ .La liaison en A ne permet pas d'avoir les mouvements Vy^*_{30} et Vz^*_{30} indépendamment l'un de l'autre. Il en résulte donc la nécessité d'une spécification géométrique de coaxialité des deux portées de roulements comme indiqué ci –dessous.

Intention de cotation :

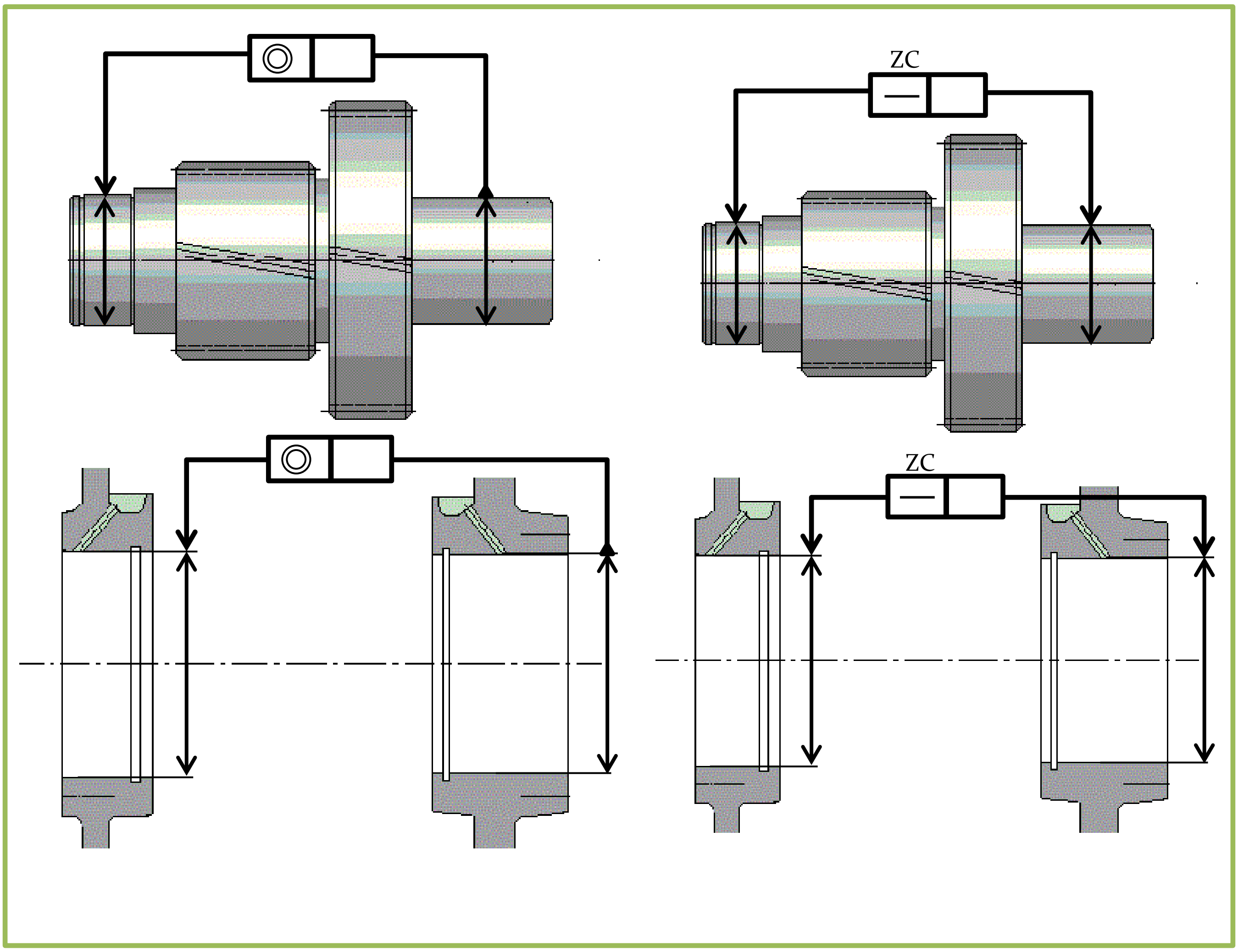


On pourra en déduire deux types de spécifications possibles pour traduire l'exigence de coaxialité ci-dessus :

- une spécification de position de type coaxialité avec référence sur les portées des roulements à rouleaux à contact oblique

Ou

- une spécification de forme de type rectitude en Zone Commune (ZC). Elle est donnée ici à titre indicatif et doit être utilisée si une des portées de roulement n'est pas à privilégier par rapport à l'autre. Ce qui n'est pas le cas de ce montage.



Conclusion

Cette solution sera contraignante et plus onéreuse, mais assurera une plus grande rigidité.

Cette solution sera dite *auto-contrainte* par les défauts dès le montage.