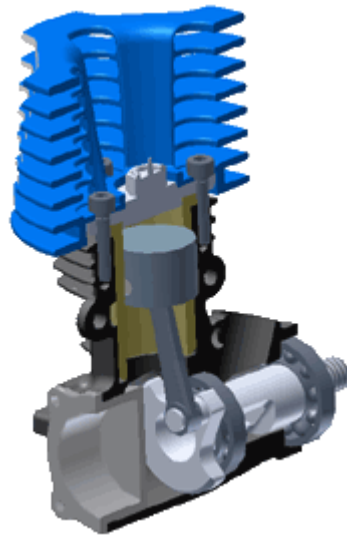
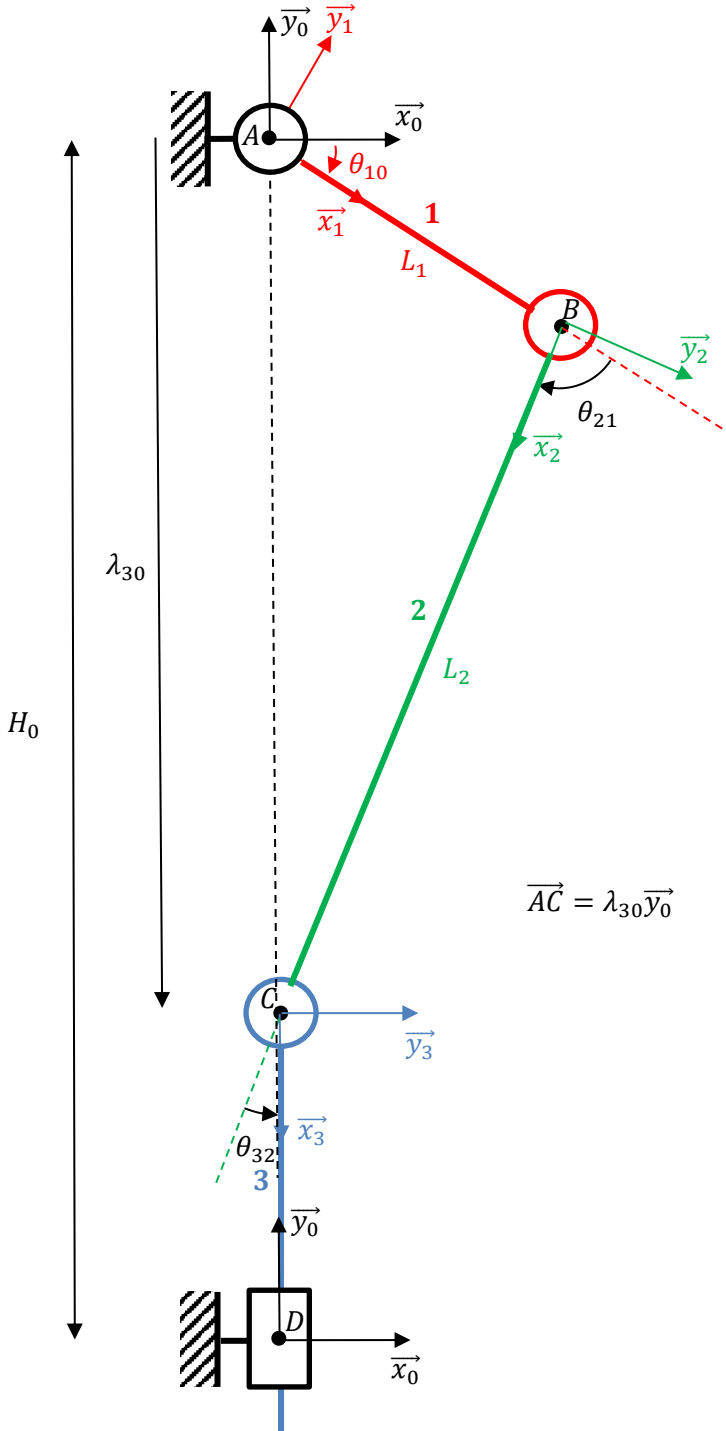


- ✓ *Bibliothèques Python*
- ✓ *Utilisation de matrices pour la résolution de systèmes linéaires*

Etude d'un système bielle/manivelle

Soit le schéma cinématique suivant représentant un système bielle/manivelle utilisé dans bon nombre de mécanismes, et en particulier dans les moteurs à pistons.



Définition des torseurs cinématiques de chaque liaison

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------

Partie 1 : Etude théorique

Question 1: En écrivant une fermeture géométrique projetée dans la base $\mathbf{0}$, montrer que

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2} \cos \theta_{10} \\ \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2} \sin \theta_{10} \end{cases}$$

En déduire l'expression de λ_{30}

Question 2: En remarquant que $\sin(\theta_{21} + \theta_{10}) < 0$ si $L_1 \neq L_2$, déterminer l'expression de θ_{21} en fonction de θ_{10} et des longueurs L_1 et L_2

Question 3: En écrivant une fermeture cinématique en B projetée dans la base $\mathbf{0}$, montrer que le système linéaire liant les différentes vitesses dans les liaisons s'écrit comme suit

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \\ -L_1 \sin \theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \\ V_{03} + L_1 \cos \theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \end{cases}$$

On propose le vecteur \mathbf{C} tel que :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

Question 4: Proposer la matrice cinématique \mathbf{K}_c telle que le système s'écrive sous la forme : $\mathbf{K}_c \mathbf{C} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ est un vecteur nul

On impose la vitesse de rotation R_{10} et on définit le vecteur \mathbf{U} tel que :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

Question 5: Modifier le système et le mettre sous la forme $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ avec \mathbf{F} un vecteur dépendant de R_{10} et de la géométrie

Partie 2 : Résolution numérique

Nous souhaitons résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin \theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos \theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

$$KU = F$$

On définit le rapport suivant :

$$r = \frac{L_2}{L_1}$$

On fera varier ce rapport dans la plage]1,5] pour étudier l'effet de ce choix sur l'accélération du piston.

On a :

$$\theta_{21} = -\theta_{10} - \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2} \cos \theta_{10}\right)$$

Pour tout le TP, on fixe :

$$\begin{aligned} L_1 &= 50 \text{ mm} \\ R_{10} &= 1 \text{ rd. s}^{-1} \end{aligned}$$

Mise en place de la résolution

Dans un premier temps, on choisira :

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta_{10} = 45^\circ \end{cases}$$

Remarques :

- La fonction $\cos^{-1}(x)$ s'écrit « `acos(x)` » sous python après l'avoir importée du module `math`
- Attention à travailler avec dans angles en radians dans les fonctions trigonométriques
- On rentrera toutefois la valeur de l'angle d'entrée en ° pour une meilleure compréhension des positions d'entrée

Question 6: Mettre en place un code de calcul permettant d'obtenir la solution du système ci-dessus (utiliser « `Sol = np.linalg.solve(K,F)` »)

Evidemment, en programmant le calcul automatique de la matrice K en fonction des données, vous vérifierez que vous avez la même que celle-ci-dessous dans le cas proposé :

```
>>> K
array([[ 1.          ,  1.          ,  0.          ],
       [-0.09354143,  0.          ,  0.          ],
       [ 0.03535534,  0.          ,  1.          ]])

>>> F
array([-1.          ,  0.03535534, -0.03535534])

>>> Sol
array([-0.37796447, -0.62203553, -0.02199228])
```

Tracé des vitesses

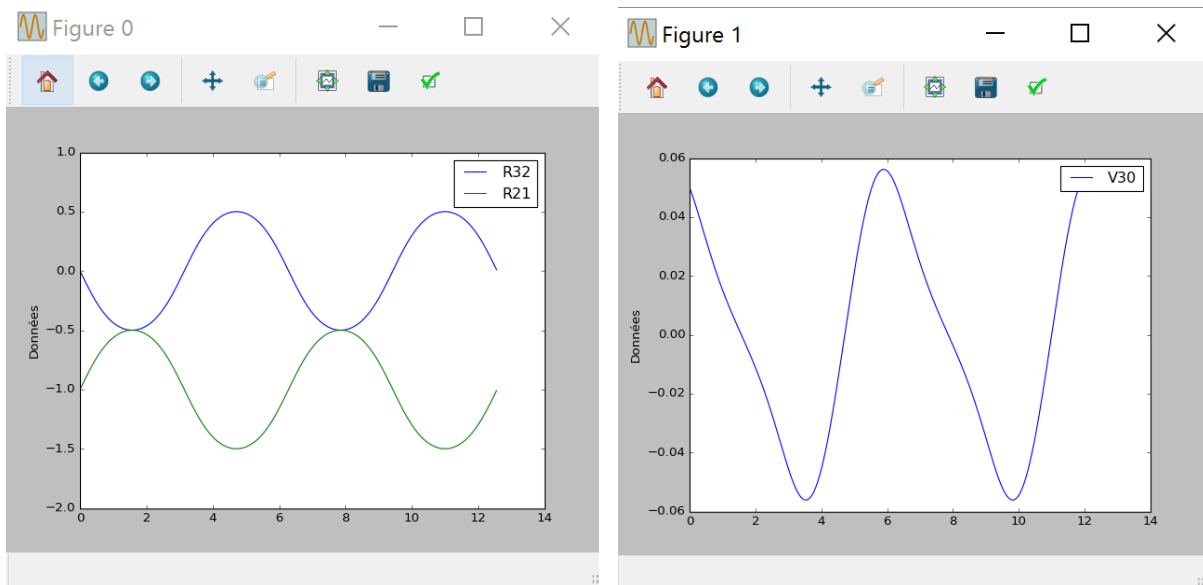
Question 7: Utiliser le code mis en place et définir une fonction *Resolution(O10_d,r)* qui renvoie le vecteur solution *U* pour une valeur d'entrée *O10_d* en degré et pour un rapport de longueurs *r*

On pensera, dans cette fonction, à mettre à jour L_2 en fonction de r .

Question 8: Mettre en place un code permettant de tracer les 3 inconnues cinématiques du vecteur *U* en fonction du temps sur deux tours de l'entrée avec une définition d'une mesure par degré (sur deux tours)

Remarque : connaissant $R_{10} = \dot{\theta}_{10}$ une constante, vous devrez recréer la liste des temps associée à la position angulaire θ_{10}

Vous devriez trouver :



Remarque : $V_{30} = -V_{03}$

Calcul et tracé de l'accélération du piston

Question 9: Proposer une fonction *f_Derivee(Liste_x,Liste_y)* qui calcule la dérivée à droite de *Liste_y* en fonction de *Liste_x* et qui renvoie la liste *Liste_x* sans son dernier terme et la liste dérivée

Question 10: Utiliser ces 2 fonctions dans un code et tracez l'accélération du piston en fonction du temps

Etude de l'influence du rapport r sur l'accélération

Question 11: Proposer une fonction $f_Etude_r(r)$ qui renvoie les listes du temps et de l'accélération du piston sur 2 tours pour une valeur de r

Question 12: Mettre en place un code et le faire tourner afin de visualiser sur la même figure l'accélération du piston pour r variant dans l'intervalle proposé

Conclusion

Question 13: Justifier le choix d'un rapport r aux alentours de 3 dans les moteurs