Tracé de l'abaque de temps de réponse à 5 %

Objectifs

L'objectif de ce devoir est de construire le programme permettant de tracer l'abaque du temps de réponse réduit utilisé en asservissement pour connaître le temps de réponse à 5% des systèmes d'ordre 2.

Vous rendrez :

- Le programme python par mail (chabert.vauvenargues@gmail.com)
- Une copie avec les réponses aux questions 3, 5, 7 et 8.

Mise en situation

L'équation différentielle d'un système du second ordre peut se mettre sous la forme :

$$s(t)+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=K\cdot e(t)$$

en notant :

- K : le gain statique ;
- ξ : le coefficient d'amortissement;
- *e (t) et s(t) : l'entrée et la sortie du système.*

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. Pour une entrée unitaire de type échelon unitaire $e(t) = u(t)$, $K = 1$ et $t \geq 0$ on montre que :

- si $\xi < 1$, le régime est pseudo périodique et : $s(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}+\arcsin\sqrt{1-\xi^2}\right)$
- si $\xi = 1$, le régime est critique et : $s(t)=1-(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$
- si $\xi > 1$, le régime est apériodique et : $s(t)=1+\frac{e^{-\omega_0 t\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}}{2\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}+\xi^2-1\right)}-\frac{e^{-\omega_0 t\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}}{2\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}-\xi^2+1\right)}$

Dans l'ensemble de ce sujet, on considèrera que *s* est une fonction du temps réduit $t\cdot\omega_0$ que l'on notera $t\omega_0$ ou tom0. On notera indifféremment le coefficient d'amortissement *z* ou ξ.

Tracé de la réponse indicielle

Question 1 *Donner, en Python, le contenu de la fonction f_critique, f_pseudo* et *f_aperiodique* permettant d'évaluer la fonction pour *s* pour pour les trois variables d'entrée ($t\cdot\omega_0$, ξ).

```
def f_critique (tom0, ξ):
"""
Fonction permettant de calculer s(tom0) pour z=1.
Entrées :
        * tom0, le temps réduit sans unité
        * z : le coefficient d'amortissement
Sortie :
        * res: s(tom0)  ici , sans unité.
"""
```

```
def f_pseudo (tom0 ,ξ):
"""
Fonction permettant de calculer s(tom0) pour z<1.
Entrées :
        * tom0, le temps réduit sans unité
        * z : le coefficient d'amortissement
Sortie :
        * res: s(tom0)  ici , sans unité.
"""
```

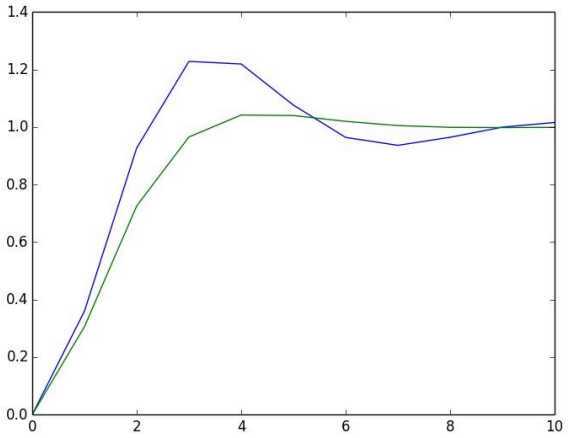
```
def f_aperiodique (tom0,ξ):
"""
Fonction permettant de calculer s(tom0) pour z>1.
Entrées :
        * tom0, le temps réduit sans unité
        * z : le coefficient d'amortissement
Sortie :
        * res: s(tom0)  ici , sans unité.
"""
```

Question 2 *Donner, en Python, le contenu de la fonction* f_s *permettant de calculer la réponse indicielle d'un système du second ordre en fonction de la valeur de z.*

```
def f_s (tom0, ξ):
"""
Fonction permettant de calculer la réponse indicielle
Entrées :
        * tom0, le temps réduit sans unité
        * z : le coefficient d'amortissement
Sortie :
        * res: s(tom0,z)
"""
```

La fonction trace_s donnée ci-dessous permet de tracer $s(t\,\omega_0,\xi)$ pour $t\,\omega_0 \in [0,10]$ par pas de 1 et pour une valeur de ξ déterminée. Les deux appels successifs de la fonction trace_s permettent de réaliser le tracer les 2 courbes ci-dessous.

```
# Définition de la fonction trace                1
def trace_s(z):                                  2
    x = []                                       3
    y = []                                       4
    for i in range(11):                          5
        t = i                                    6
        x.append(t)                              7
        y.append(f_s(t,z))                       8
    plot(x,y)                                    9
# Appels de la fonction trace                    10
trace_s(0.4)                                     11
trace_s(0.7)                                     12
```



Question 3 *Commenter les lignes 2 à 9.*

On observe que la courbe tracée n'est pas lissée. Pour avoir un meilleur rendu, il est nécessaire d'évaluer la fonction en davantage de points.

Question 4 *Modifier les lignes 5 et 6 pour que la courbe tracée soit réalisée en 1000 points sur un intervalle de t ω_0 variant de 0 à 10.*

Tracé de l'abaque

On note t_r le temps de réponse à 5%. L'abaque du temps de réponse permet de tracer le produit $t_r\,\omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

Question 5 *Dans les conditions de la fonction s définie dans la partie précédente, quelle est la valeur finale prise par s(t) ?*

Question 6 *Écrire en Python la fonction* is_in_strip *ayant les spécifications suivantes :*

```
def is_in_strip(x):                                          1
    """                                                      2
    Fonction permettant de savoir si une valeur est dans la bande des + ou - 5% de la valeur finale .   3
    Entrée :                                                 4
        x, flt : réel                                        5
    Sortie :                                                 6
        True si la valeur est dans la bande à + ou - 5%      7
        False si la valeur n'est pas dans la bande à + ou - 5%   8
    """                                                      9
```

On donne la fonction suivante permettant de connaître le temps de réponse réduit à partir duquel la réponse indicielle d'un système est dans la bande à plus ou moins 5% pour un coefficient d'amortissement particulier.

```
def calcul_tom0(z,tom0=500):
    """
    Recherche du temps de réponse à 5%
    Entrées :
    * z, _t : coeffcient d'amortissement
    * tom0 ( optionnel ) : si non précisé, on calcule le temps de réponse en partant de tom0 = 500
    Sortie :
    * tom0 : temps de réponse à 5%
    """
    pas_tom0=0.05
    x = f_s(tom0,z)
    if z<0.7:
        # Dans cas, s' assurer que le tom0 initial est suffisamment grand
        while is_in_strip(x) :
            tom0 = tom0 - pas_tom0
            x = f_s(tom0,z)
        tom0=tom0+pas_tom0
    else :
        # Dans cas, s' assurer que le tom0 initial est suffisamment petit
        while not is_in_strip(x) :
            tom0 = tom0 + pas_tom0
            x = f_s(tom0,z)
        tom0=tom0-pas_tom0
    return tom0
```

Question 7 *Expliquer le mode de recherche du temps de réponse à 5% dans le cas où* $z < 0{,}7$ *puis dans le cas où* $z \geq 0{,}7$. *Pourquoi distingue-t-on ces 2 cas ? On pourra s'aider de l'abaque donné en fin d'énoncé.*

On pourra remarquer que dans un cas, la recherche se fait « en avançant » et dans le second cas « en reculant ».

Le code suivant permet de créer les listes xx et yy permettant de tracer l'abaque du temps de réponse réduit en fonction du coefficient d'amortissement.

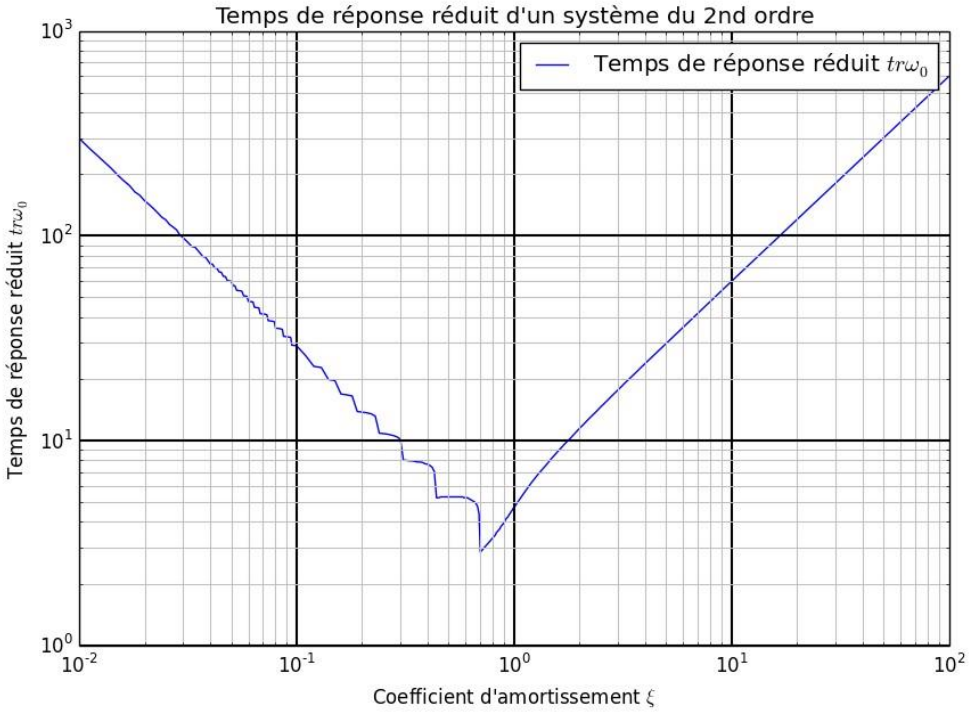
```
xx,yy = [],[]
n = 1000
z = 0.01
tom0 = 500
pasz = 0.01
while z<=100:
        print (z)
        if z<0.7:
                tom0=calcul_tom0(z,tom0)
        else :
                tom0=calcul_tom0(z,0)
        if z<0.1:
                pasz = 0.001
        elif z<1:
                pasz = 0.01
        elif z<10:
                pasz = 0.1
        else :
                pasz = 1
        xx.append(z)
        yy.append(tom0)
        z=z+pasz
```

Question 8

1. *Donner l'intervalle de variation de* z *pour le tracé demandé.*
2. *Donner le pas de* z *sur chacun des intervalles.*
3. *Pourquoi ne pas conserver le même pas sur chacun de ces intervalles ?*
4. *En vous aidant du tracé de l'abaque, expliquer pourquoi* tom0 *est calculé différemment suivant la valeur de* z *? Expliquer le choix des arguments de la fonction* calcul_tom0 *dans chacun des cas.*

Code pour le tracé des courbe log/log

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.plot(xx,yy,label="Temps de réponse réduit $tr \\omega_0$")
plt.xlabel("Coefficient d'amortissement $\\xi$")
plt.ylabel("Temps de réponse réduit $tr \\omega_0$")
plt.title("Temps de réponse réduit d'un système du 2nd ordre")
plt.legend()
plt.loglog()
plt.grid(which="major",axis="x",linewidth=1.5, linestyle='-')
plt.grid(which="major",axis="y",linewidth=1.5, linestyle='-')
plt.grid(which="minor",axis="x",linewidth=0.75, linestyle='-', color='0.75')
plt.grid(which="minor",axis="y",linewidth=0.75, linestyle='-', color='0.75')
```



Abaque du temps de réponse réduit pour un système du second ordre