Pour approcher la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 2, on a vu en cours la méthode de "vectorialisation", qui consiste à ramener l'EDO d'ordre 2 en un système de 2 EDO d'ordre 1, puis à appliquer à chacune de ces EDO une méthode d'Euler.
Mais il existe d'autres méthodes. On en propose une ci-après, qui repose sur le résultat suivant.

1. Soit x une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle $]a,b[$.
Démontrer que, pour tout $t \in]a,b[$: $x''(t) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{x(t+h)-2x(t)+x(t-h)}{h^2}\right)$.

On utilisera 2 fois une formule de Taylor. Attention : il sera faux de passer par les taux d'accroissement.

Présentation de la méthode

On s'intéresse ici aux fonctions $x \in C^2([t_0,t_f],\mathbb{R})$, solutions d'équations différentielles de la forme :

$$(E_2)\begin{cases}\forall t\in[t_0,t_f], \quad x''(t)=f(t,x(t),x'(t))\\ x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=v_0\end{cases}$$

où f est une fonction définie sur $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}$, continue en la variable t.

Voici le principe de la méthode dite "aux différences finies" (à pas constant) :

• Comme pour tous les schémas numériques, on "discrétise" l'intervalle $[t_0,t_f]$ en n subdivisions régulières $[t_k,t_{k+1}]$, où $t_k = t_0+kh$, avec $h=\dfrac{t_f-t_0}{n}$ le pas constant de cette discrétisation.

• On définit alors la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par : $\begin{cases}x_0 = x(t_0)\\ x_1 = v_0\times h + x_0\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \dfrac{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}{h^2} = f\left(t_k,x_k,\dfrac{x_k-x_{k-1}}{h}\right)\end{cases}$

Programmation de la méthode numérique

2. Écrire une fonction `euler2DF` de paramètres $f, x0, v0, t0, tf$ et n (*conservez l'ordre des variables !*) :

- qui construit les tableaux $Lt=[t_0,\dots,t_n]$ et $Lx=[x_0,\dots,x_n]$ (avec les notations précédentes) ;
- qui affiche le graphe de la fonction affine par morceaux reliant les points de coordonnées (t_k,x_k) ;
- qui retourne le tuple (Lt,Lx).

3. Proposer une commande qui teste `euler2DF` sur l'exemple classique :

$$(H)\begin{cases}\forall t\in[0,30],\ x''(t)+\sin(x(t))=0\\ x(t_0)=x0\\ x'(t_0)=v0\end{cases}$$

avec $x0=3$, $v0=0$ et $n=100$.

4. Soit le problème de Cauchy linéarisé $(H_L)\begin{cases}\forall t\in[0,30],\ x''(t)+x(t)=0\\ x(0)=x0\\ x'(0)=v0\end{cases}$

a) Résoudre mathématiquement cette équation différentielle (H_L).

b) On note $(t,x_0,v_0)\mapsto xL(t,x_0,v_0)$ cette fonction solution.
Donner un script Python permettant de représenter la fonction $t\mapsto xL(t,3,0)$ sur l'intervalle $[0,30]$.

c) Que peut-on affirmer (même sans avoir les courbes) sur la nature de l'approximation entre x et x_L, lorsque $x0=3$?

5. Contrairement à la méthode du cours, on n'obtient pas, par cette méthode, une approximation de la vitesse. Proposer une fonction `vitesseDF`, qui utilise la fonction `euler2DF` et retourne un tableau $Lv=[v_0,\dots,v_n]$, tel que, pour tout k, $v_k\approx x'(t_k)$.